교육과학기술부 검정
2009. 7. 31.

고 등 학 교

적분과 통계

이강섭 | 왕규채 | 송교식 | 양인웅

(주)지학사

들 어 가 는 말

수학은 실생활 문제의 탐구에서 비롯되어 점차 이론적 체계를 갖추어 왔으며, 21세기 지식 기반의 정보화 사회에서는 그 중요성이 더욱 부각되고 있습니다. 수학은 자연법칙의 보금자리이며, 순수한 논리이자 창의적인 예술입니다. 이러한 수학의 특성을 바탕으로 학생들은 다음과 같은 목표를 염두에 두고 공부하기 바랍니다.

첫째, 수학은 일상생활을 비롯하여 다른 여러 교과 공부의 기초가 되므로 그 유용성이 매우 높습니다. 따라서 학습자는 수학 학습을 통하여 타 교과의 이해에 필요한 지식 · 기능과 앞으로 선택할 직장이나 전문 분야에서 쓰이는 지식 · 기능을 습득하고, 일상생활에서 직면하는 여러 가지 문제를 해결하는 능력을 길러야 합니다.

둘째, 수학의 학습은 탐구하고 추상화하는 활동이 중심이 됩니다. 따라서 학습자는 수학적 활동이나 조작을 통하여 수학의 추상화된 개념을 형성하고 일반적 원리를 이해하며, 자연 현상의 일반적인 원리를 도출하는 능력을 길러야 합니다.

셋째, 수학은 개념이나 원리를 함축성이 큰 기호로 나타낸 일종의 언어입니다. 따라서 학습자는 수학 기호와 개념의 관계에 대한 이해력을 높이고, 그림 그리기, 표 만들기, 기호화하기 등 다양한 수학적 표현 능력과 의사소통 능력을 길러야 합니다.

넷째, 수학은 논리성과 체계성에 있어서 뛰어난 장점을 가지고 있습니다. 따라서 학습자는 자연 현상 및 사회 현상의 규칙성을 찾을 수 있어야 하며, 가설 설정을 위한 귀납적 추론 능력과 타당한 논증을 위한 연역적 추론 능력을 증진하는 등 합리적인 논리 전개 능력을 길러야 합니다.

다섯째, 수학을 탐구하는 사람들은 그 아름다움의 본질에 매료되는 경험을 합니다. 예를 들어 건축물이나 생활용품 등에서 심미성을 추구하기 위한 황금비의 구현이나 정다면체를 포함한 매력적인 기하학적 도형에 대한 탐구 등이 그것입니다. 따라서 학습자는 이미 배운 여러 가지 정보를 새로운 문제 상황에 적용하여 해결함으로써 수학의 가치와 소중함을 인식하고, 수학적 아름다움을 느낄 수 있어야 합니다.

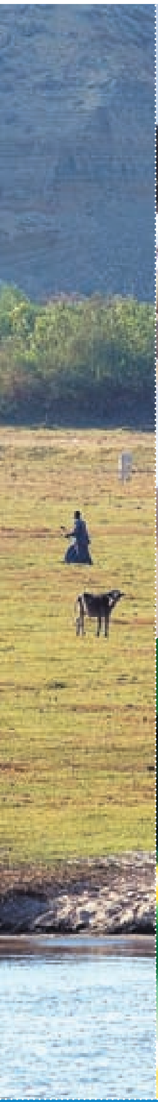
결론적으로, 이 교과서를 이용하여 공부하는 모든 학생들이 이와 같은 목표를 달성함으로써 보다 합리적이고 행복한 문화생활을 누리기 바랍니다.

지은이 씀

차 례 CONTENTS

Ⅰ 적분법

Ⅱ 순열과 조합

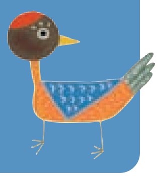


III 확률

IV 통계

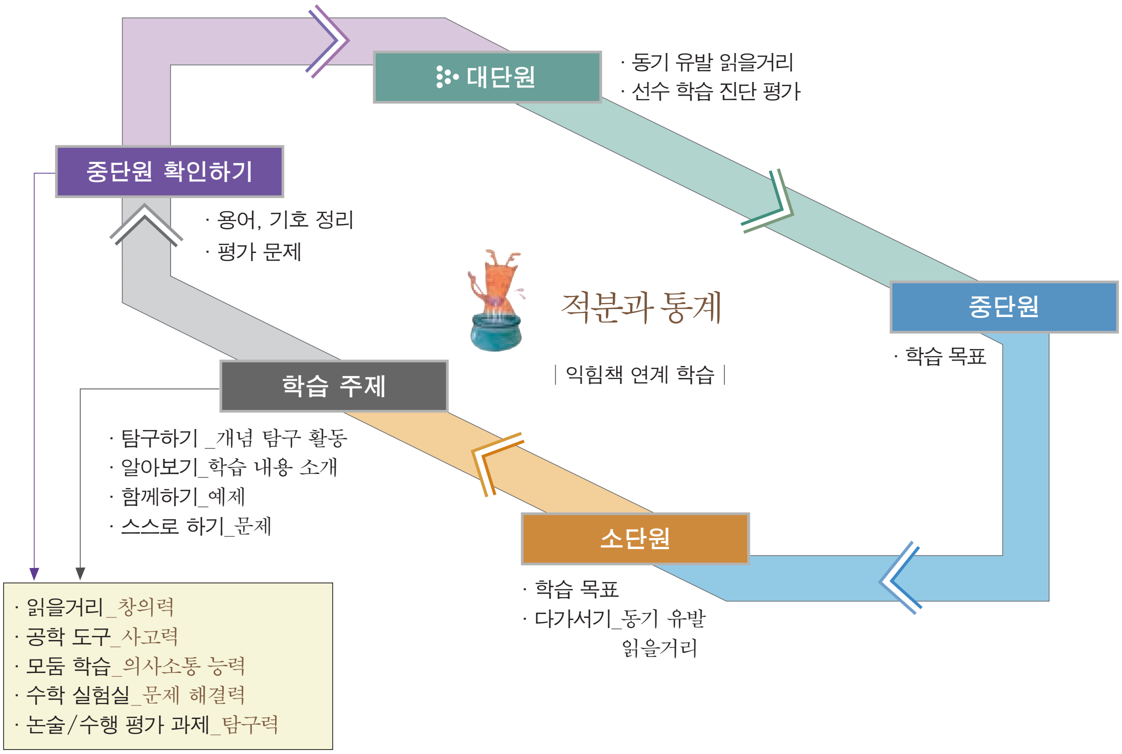
부록*

이 책의 구성



이 책은 2007년 개정 교육과정의 정신을 반영하여 수학적 지식과 기능을 습득할 수 있도록 하였다. 이를 바탕으로 여러 가지 문제를 논리적으로 사고하고 수학적으로 고찰하여 합리적으로 해결하는 능력을 키우며, 수학에 대한 긍정적인 태도를 갖도록 구성하였다.

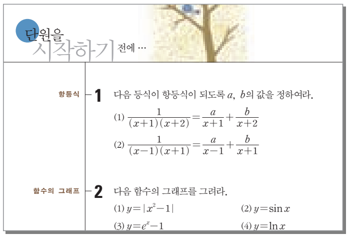
특히, 익힘책과의 연계를 긴밀히 하여 학교 교육 체계에 적합하도록 하였으며, 학습자의 사고력, 탐구력, 창의력, 의사소통 능력을 기를 수 있도록 쉽고 재미있게 구성하였다.



| 단원 도입 및 동기 유발 |

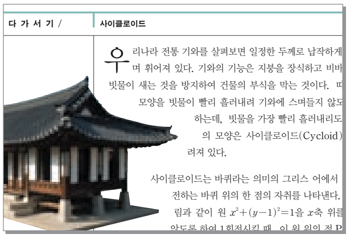
단원을 시작하기 전에

본 단원의 학습 주제와 연계되는 학습 내용을 확인하고 평가할 수 있도록 하였다.



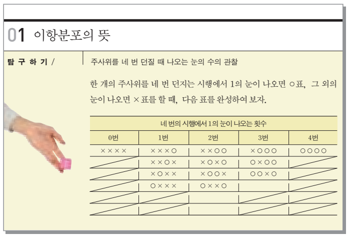
다가서기

소단원 학습에 필요한 개념을 사진, 만화, 읽기 자료 등으로 표현하였다.



탐구하기

소주제 학습의 실마리가 되는 내용을 실생활 또는 선수 학습에서 찾아보았다.



| 내용 전개 |

알아보기_본 단원의 학습 주제와 연계되는 학습 내용을 확인하고 평가할 수 있도록 하였다.

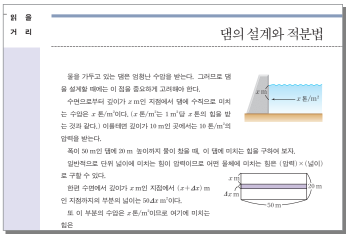
함께하기_대표적인 문제를 해결하여 학습 내용을 정리하고 풀이 방법을 익히도록 하였다.

스스로 하기_스스로 문제를 해결하고 학습 내용을 점검할 수 있도록 하였다.

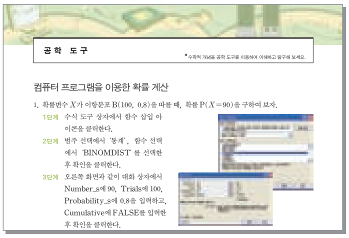
더 많은 문제를 풀어 보며 학습 내용을 확인할 수 있도록 익힘책과 연계하였다.

| 수학적 가치 함양 |

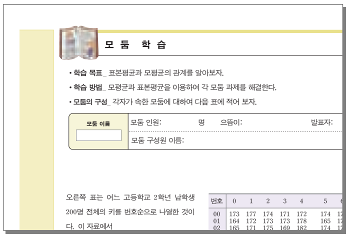
읽을거리
단원과 관련된 상식을 소개하여 수학 학습의 흥미를 높일 수 있도록 하였다.



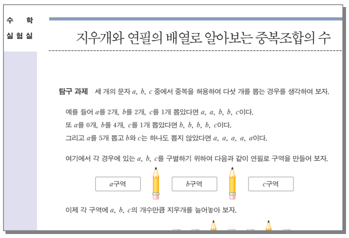
공학 도구
계산기, 컴퓨터 프로그램 및 인터넷을 활용하여 수학적 사고력 향상에 도움이 되도록 하였다.



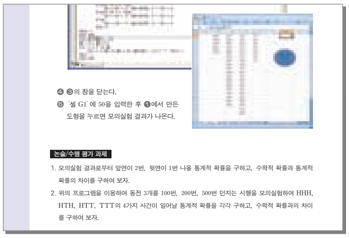
모둠 학습
주어진 주제에 대한 모둠 학습을 통하여 의사소통 능력을 향상시키고, 협동심을 기를 수 있도록 하였다.



수학 실험실
실생활에서 찾을 수 있는 다양한 소재로 문제 해결력을 기를 수 있도록 하였다.



논술/수행 평가 과제
학습 내용의 이해를 바탕으로 조사, 분석, 관찰, 발표 등의 활동을 통하여 탐구력을 기를 수 있도록 하였다.



| 학습평가 |

중단원 확인하기
중단원에서 새로 나온 용어, 기호를 정리하고, 종합적인 사고 능력을 평가할 수 있도록 하였다.

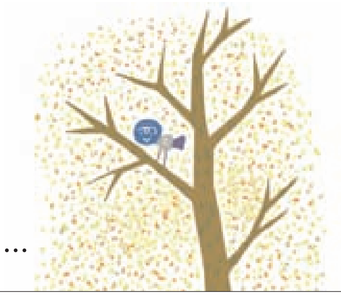
 계산기를 활용할 수 있는 문제이다.

 컴퓨터를 활용할 수 있는 문제이다.

I 적분법

컴퓨터 단층 촬영기(CT)는 신체의 단면을 촬영하여 그 내부 구조를 파악하고, 종양의 크기와 위치를 알아보는 의료기이다. 이처럼 의학에서도 인체를 세분하여 촬영하고 그것을 다시 종합하여 전체를 파악하는 적분적인 개념을 활용한다.

컴퓨터 단층 촬영기



단원을 시작하기 전에 …

항등식

1 다음 등식이 항등식이 되도록 a, b의 값을 정하여라.

(1) $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x+2}$

(2) $\dfrac{1}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x+1}$

함수의 그래프

2 다음 함수의 그래프를 그려라.

(1) $y=|x^2-1|$ (2) $y=\sin x$

(3) $y=e^x-1$ (4) $y=\ln x$

삼각함수의 배각의 공식

3 다음 물음에 답하여라.

(1) $\cos x=\dfrac{3}{5}$일 때, $\sin 2x$의 값을 구하여라. $\left(\text{단, } 0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$

(2) $\sin x=\dfrac{3}{4}$일 때, $\cos 2x$의 값을 구하여라. $\left(\text{단, } \dfrac{\pi}{2}<x<\pi\right)$

극한값의 계산

4 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$ (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$

여러 가지 함수의 도함수

5 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $y=x^3+5x^2-2$ (2) $y=e^x$

(3) $y=\ln x-x^2$ (4) $y=\sin x\cos x$

(5) $y=(3x^2-5)^4$ (6) $y=\sin^n x$

1

부정적분

이 단원을 배우면

• 부정적분의 뜻을 알 수 있다.

• 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분을 알고, 다항함수의 부정적분을 구할 수 있다.

• 함수 $y=x^{n}$ (n은 실수)의 부정적분을 구할 수 있다.

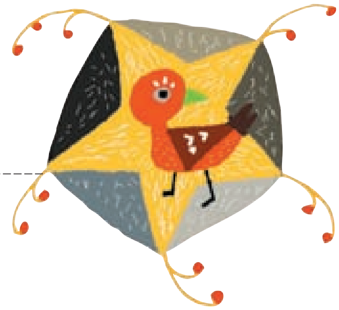
• 삼각함수의 부정적분을 구할 수 있다.

• 지수함수와 로그함수의 부정적분을 구할 수 있다.

• 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

• 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

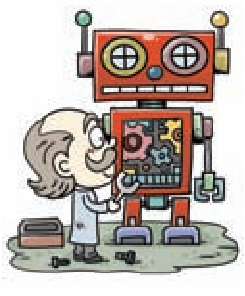
1 부정적분의 뜻과 여러 가지 함수의 부정적분



학습 목표

- 부정적분의 뜻을 알고, 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분을 안다.
- 다항함수의 부정적분을 구할 수 있다.
- 여러 가지 함수의 부정적분을 구할 수 있다.

다 가 서 기 / 분해와 조립



로봇을 만들려면 필요한 부품을 준비하여 순서에 맞게 조립해야 한다. 로봇을 조립하다가 중간에 잘못되면 다시 분해해야 하며, 이때 분해는 조립의 역순으로 한다.

한편 지난 2008년 방화로 소실되었던 숭례문은 한국 전쟁 당시에도 폭탄에 의하여 석축과 지붕이 훼손되어 1961년 대규모의 해체 및 복원 공사가 진행된 바 있다.

이처럼 훼손된 문화재를 복원할 때에도 각 부분을 분해하여 수리하고 이를 다시 조립한다. 이때, 조립은 분해의 역순으로 이루어진다.

이와 같은 분해와 조립의 관계는 미분과 적분에서도 찾아볼 수 있다.

01 부정적분의 뜻과 성질

탐 구 하 기 / 도함수 구하기

다음 표는 함수 $F(x)=x^n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$과 그 도함수 $F'(x)=f(x)$를 나타낸 것이다. 빈칸에 알맞은 것을 써넣어 보자.

$F(x)$	x	x^2	x^3	x^4	x^5		$\cdots$	
$F'(x)=f(x)$	1	$2x$			$5x^4$	$6x^5$	$\cdots$	nx^{n-1}

알 아 보 기 / 부정적분의 뜻을 알아보자.

함수 $f(x)$를 미분하면 도함수 $f'(x)$를 얻는다. 이제 미분한 결과가 $f(x)$가 되는 함수에 대하여 알아보자.

함수 $F(x)$의 도함수가 $f(x)$일 때, 즉

$$F'(x)=f(x)$$

일 때, $F(x)$를 $f(x)$의 **부정적분** 또는 원시함수라 하고, 기호로

$$\int f(x)dx$$

와 같이 나타낸다.

부정적분(不定積分)을 영어로 indefinite integral이라고 한다.

기호 $\int f(x)dx$를 '$f(x)$의 부정적분' 또는 '인티그럴 $f(x)dx$' 라고 읽는다.

미분한다

$\int f(x)dx$ $f(x)$

적분한다

이때, 함수 $f(x)$를 **피적분함수**라고 한다.

또 함수 $f(x)$의 부정적분을 구하는 것을 $f(x)$를 적분한다고 하며, 그 계산 방법을 적분법이라고 한다.

| 보기 | 다음과 같이 세 함수 $F(x)$, $G(x)$, $H(x)$와 그 도함수를 생각해 보자.

$$F(x)=x^3+x \Rightarrow F'(x)=3x^2+1$$
$$G(x)=x^3+x+1 \Rightarrow G'(x)=3x^2+1$$
$$H(x)=x^3+x-3 \Rightarrow H'(x)=3x^2+1$$

여기서 x^3+x, x^3+x+1, x^3+x-3은 모두 함수

$$f(x)=3x^2+1$$

의 부정적분임을 알 수 있다.

일반적으로 함수 $F(x)$가 함수 $f(x)$의 부정적분 중의 하나이고, $G(x)$가 $f(x)$의 또 다른 부정적분이면

$$F'(x)=f(x),\ G'(x)=f(x)$$

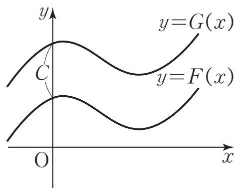
이므로

$$\begin{aligned}\{G(x)-F(x)\}'&=G'(x)-F'(x)\\&=f(x)-f(x)=0\end{aligned}$$

도함수가 0인 함수는 상수함수이므로

$$G(x)-F(x)=C\ (C\text{는 상수})$$

즉, $\quad G(x)=F(x)+C$



따라서 $f(x)$의 모든 부정적분은 $F(x)+C$의 꼴로 나타낼 수 있다. 이때, 상수 C를 **적분상수**라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

적분하는 것은 미분하는 것의 역연산이다.

부정적분

$F'(x)=f(x)$일 때

$$\int f(x)dx=F(x)+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})$$

$\int 1dx$는 간단히 $\int dx$로 나타낸다.

| 보기 | (1) $\dfrac{d}{dx}x=1$이므로 $\quad \int 1\,dx=x+C$

(2) $\dfrac{d}{dx}x^2=2x$이므로 $\quad \int 2x\,dx=x^2+C$

스스로 하기 /

익힘책 13쪽 | 익힘책 14쪽 | 익힘책 15쪽

1 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int 3x^2\,dx$ (2) $\int 5x^4\,dx$

2 다음 등식을 만족하는 함수 $f(x)$를 구하여라. (단, C는 적분상수)

(1) $\int f(x)dx=3x+C$ (2) $\int f(x)dx=3x^2+4x+C$

(3) $\int f(x)dx=x^3-2x^2+C$ (4) $\int f(x)dx=\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{1}{3}x^3+2x+C$

알 아 보 기 / 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분을 알아보자.

미분법의 공식을 이용하여 부정적분의 성질을 알아보자.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 부정적분을 각각 $F(x)$, $G(x)$라고 하면

$$F(x)=\int f(x)dx,\ F'(x)=f(x)$$

$$G(x)=\int g(x)dx,\ G'(x)=g(x)$$

가 성립한다.

$y=kf(x)$이면 $y'=kf'(x)$

k를 상수라고 하면 $\{kF(x)\}'=kF'(x)=kf(x)$이므로

$$kF(x)=\int kf(x)dx$$

이때, $kF(x)=k\int f(x)dx$이므로

$$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$$

$y=f(x)+g(x)$이면 $y'=f'(x)+g'(x)$

또 $\{F(x)+G(x)\}'=F'(x)+G'(x)=f(x)+g(x)$이므로

$$F(x)+G(x)=\int\{f(x)+g(x)\}dx$$

이때, $F(x)+G(x)=\int f(x)dx+\int g(x)dx$이므로

$$\int\{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$$

일반적으로 다음과 같은 부정적분의 성질이 성립한다.

부정적분의 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

[1] $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ (단, k는 상수)

[2] $\int\{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

[3] $\int\{f(x)-g(x)\}dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$

부정적분의 성질 [2], [3]은 세 개 이상의 함수에 대해서도 성립한다.

스 스 로 하 기 /

익힘책 13쪽 | 익힘책 14쪽 | 익힘책 15쪽

3 부정적분의 성질 [3]을 증명하여라.

02 다항함수의 부정적분

탐 구 하 기 / 다항함수의 도함수

다음 표는 함수 $F(x)=\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$과 그 도함수 $F'(x)=f(x)$를 나타낸 것이다. 빈칸에 알맞은 것을 써넣어 보자.

$F(x)$	x	$\frac{1}{2}x^2$	$\frac{1}{3}x^3$	$\frac{1}{4}x^4$		$\cdots$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$F'(x)=f(x)$	1	x			x^4	$\cdots$	

알 아 보 기 / x^n의 부정적분을 구하여 보자.

x를 미분하면 1, $\dfrac{1}{2}x^2$을 미분하면 x, $\dfrac{1}{3}x^3$을 미분하면 x^2이다.

일반적으로 n이 음이 아닌 정수일 때

$$\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)'=x^n$$

이 성립하므로 x^n의 부정적분은 다음과 같다.

$x^0=1$로 생각한다. 즉, $n=0$일 때 $\int x^0\,dx=\int 1\,dx=x+C$

x^n의 부정적분

n이 음이 아닌 정수일 때

$$\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C \quad (\text{단, } C\text{는 적분상수})$$

| 보기 | (1) $\displaystyle\int x\,dx=\frac{1}{1+1}x^{1+1}+C=\frac{1}{2}x^2+C$

(2) $\displaystyle\int x^2\,dx=\frac{1}{2+1}x^{2+1}+C=\frac{1}{3}x^3+C$

스 스 로 하 기 / 익힘책 13쪽 | 익힘책 14쪽 | 익힘책 15쪽

1 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int x^3\,dx$ (2) $\displaystyle\int x^4\,dx$ (3) $\displaystyle\int x^6\,dx$

함께하기 /

익힘책 13쪽 | 익힘책 14쪽 | 익힘책 15쪽

1 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int(5x^2-2x+1)dx$　　(2) $\int(x+1)(x-2)dx$

풀이

(1) $\int(5x^2-2x+1)dx=5\int x^2dx-2\int x\,dx+\int 1\,dx$

$=5\left(\frac{1}{3}x^3+C_1\right)-2\left(\frac{1}{2}x^2+C_2\right)+(x+C_3)$

$=\frac{5}{3}x^3-x^2+x+(5C_1-2C_2+C_3)$

여기서 $5C_1-2C_2+C_3$을 C로 놓으면

$$\int(5x^2-2x+1)dx=\boldsymbol{\frac{5}{3}x^3-x^2+x+C}$$

(2) $\int(x+1)(x-2)dx=\int(x^2-x-2)dx$

$=\int x^2dx-\int x\,dx-\int 2\,dx$

$=\boldsymbol{\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+C}$

적분상수가 여러 개 있는 경우에는 이들을 묶어서 마지막에 적분상수 C 하나로만 나타낸다.

2 $F'(x)=2x+3$, $F(0)=2$를 만족시키는 함수 $F(x)$를 구하여라.

풀이

$F'(x)=2x+3$이므로　$F(x)=\int(2x+3)dx=x^2+3x+C$

$F(0)=2$이므로　$F(0)=0^2+0+C=2$, 즉 $C=2$

$\therefore$ $\boldsymbol{F(x)=x^2+3x+2}$

$F(0)=2$로부터 적분상수 C의 값을 구할 수 있다.

스스로 하기 /

익힘책 13쪽 | 익힘책 14쪽 | 익힘책 15쪽

2 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int(6x^2+2x-3)dx$　　(2) $\int(x-1)(2x+1)dx$

3 다음 조건을 만족시키는 함수 $F(x)$를 구하여라.

$$F'(x)=-3x^2+4x-2,\ F(1)=0$$

03 함수 $y=x^n$ (n은 실수)의 부정적분

탐 구 하 기 / 함수의 도함수

다음 표는 함수 $f(x)$와 그 도함수 $f'(x)$를 나타낸 것이다. 빈칸에 알맞은 것을 써넣어 보자.

$f(x)$	$\sqrt{x}$	$x^{\sqrt{2}}$	$\ln x$	$\ln(-x)$
$f'(x)$				

알 아 보 기 / 함수 $y=x^n$ (n은 실수)의 부정적분을 구하여 보자.

미분법을 역으로 이용하면 주어진 함수의 부정적분을 구할 수 있다.
일반적으로 임의의 실수 n에 대하여

$$\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)'=x^n\ (n\neq-1),\ (\ln|x|)'=\frac{1}{x}$$

이 성립하므로 x^n의 부정적분은 다음과 같다.

함수 $y=x^n$ (n은 실수)의 부정적분

(1) $n\neq-1$일 때, $\displaystyle\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$

(2) $n=-1$일 때, $\displaystyle\int x^{-1}dx=\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$

| 보기 | (1) $\displaystyle\int x^{\frac{4}{3}}dx=\frac{1}{\frac{4}{3}+1}x^{\frac{4}{3}+1}+C=\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}+C$

(2) $\displaystyle\int\frac{2}{x}dx=2\int\frac{1}{x}dx=2\ln|x|+C$

스 스 로 하 기 / 익힘책 13쪽 | 익힘책 14쪽 | 익힘책 15쪽

1 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2}dx$ (2) $\displaystyle\int\frac{3}{x}dx$ (3) $\displaystyle\int\frac{x^2-x}{\sqrt{x}}dx$

04 삼각함수의 부정적분

알 아 보 기 / 삼각함수의 부정적분을 구하여 보자.

삼각함수의 미분법에서 다음을 알 수 있다.

$$(\cos x)'=-\sin x,\ (\sin x)'=\cos x$$
$$(\tan x)'=\sec^2 x,\ (\cot x)'=-\mathrm{cosec}^2 x$$

그러므로 삼각함수의 부정적분은 다음과 같다.

삼각함수의 부정적분

(1) $\int \sin x\,dx=-\cos x+C$ (2) $\int \cos x\,dx=\sin x+C$

(3) $\int \sec^2 x\,dx=\tan x+C$ (4) $\int \mathrm{cosec}^2 x\,dx=-\cot x+C$

$1+\cot^2 x=\mathrm{cosec}^2 x$

| 보기 | (1) $\int \cot^2 x\,dx=\int (\mathrm{cosec}^2 x-1)dx$

$$=\int \mathrm{cosec}^2 x\,dx-\int dx$$
$$=-\cot x-x+C$$

$\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}$

(2) $\int \cos^2\frac{x}{2}\,dx=\int \frac{1+\cos x}{2}\,dx$

$$=\int\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos x\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int \cos x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\sin x+C$$

스 스 로 하 기 / 익힘책 13쪽 | 익힘책 14쪽 | 익힘책 15쪽

1 다음 부정적분을 구하여라.

$\tan^2 x+1=\sec^2 x$

(1) $\int (\sin x+3\cos x)dx$ (2) $\int \tan^2 x\,dx$

(3) $\int \sin^2\frac{x}{2}\,dx$ (4) $\int \frac{\sin^3 x+2}{\sin^2 x}\,dx$

05 지수함수의 부정적분

탐 구 하 기 / 지수함수의 도함수

다음 표는 지수함수 $f(x)$와 그 도함수 $f'(x)$를 나타낸 것이다. 빈칸에 알맞은 것을 써넣어 보자.

$f(x)$	e^x	2^x	3^x
$f'(x)$			

알 아 보 기 / 지수함수의 부정적분을 구하여 보자.

지수함수의 미분법에서 다음을 알 수 있다.

$$(e^x)'=e^x,\ (a^x)'=a^x \ln a\ (\text{단, } a>0,\ a\neq 1)$$

그러므로 지수함수의 부정적분은 다음과 같다.

지수함수의 부정적분

(1) $\int e^x dx=e^x+C$

(2) $\int a^x dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$ (단, $a>0$, $a\neq 1$)

| 보기 | (1) $\int e^{x+2} dx=e^2\int e^x dx=e^2\cdot e^x+C=e^{x+2}+C$

(2) $\int 2^{x-1} dx=\dfrac{1}{2}\int 2^x dx=\dfrac{2^x}{2\ln 2}+C=\dfrac{2^{x-1}}{\ln 2}+C$

스 스 로 하 기 / 익힘책 13쪽 | 익힘책 14쪽 | 익힘책 15쪽

1 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int (e^x-\sin x)dx$

(2) $\int \dfrac{x\cdot 2^x-3}{x} dx$

(3) $\int (e^{x-1}+3^{x+2})dx$

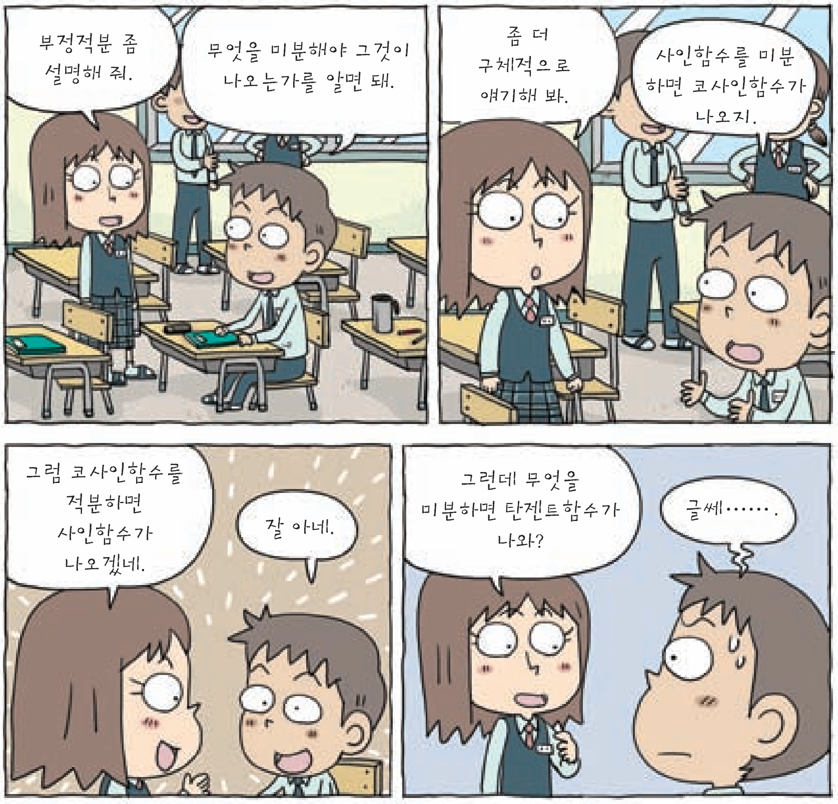
(4) $\int (3^x+1)^2 dx$

2 치환적분법과 부분적분법

학습 목표

- 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
- 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

다 가 서 기 / **거꾸로 생각하여 해결하기**



인수분해는 다음과 같이 식을 전개하는 과정을 거꾸로 하는 것이다.

$$\begin{aligned}(a-b)(a+b)&=a(a+b)-b(a+b)\\&=a^2+ab-ba-b^2=a^2-b^2\end{aligned}$$

그런데 복잡한 식은 인수분해하는 것이 쉽지 않기 때문에 치환하는 방법 등을 이용하여 해결한다.

적분법에서도 복잡한 식을 적분할 때 치환하는 방법이나 일부분을 나누는 방법 등을 이용한다.

01 치환적분법

탐 구 하 기 / 거듭제곱의 부정적분

다음 부정적분을 구하여 보자.

1. $\int (2x+1)^2\,dx$

2. $\int (2x+1)^3\,dx$

알 아 보 기 / 치환적분법에 대하여 알아보고, 간단한 식을 치환하여 부정적분을 구하여 보자.

부정적분의 성질만을 이용하여 $\int (2x+1)^{10}\,dx$와 같은 부정적분을 구하는 것은 어렵다. 이와 같은 경우 적분하려는 식의 일부 또는 전체를 새로운 변수로 바꾸어 놓고 적분하면 편리하다.

이를테면 부정적분 $F(x)=\int f(x)\,dx$(⋯ ㉠)에서 $x=g(t)$로 놓으면 $F(x)$는 t의 함수, 즉 $F(g(t))$가 된다.

$F(x)=F(g(t))$를 t에 대하여 미분하면 합성함수의 미분법에 의하여

$$\frac{d}{dt}F(x)=\frac{d}{dx}F(x)\cdot\frac{dx}{dt}=f(x)g'(t)=f(g(t))g'(t)$$

즉, $$F(x)=\int f(g(t))g'(t)\,dt \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$\int f(x)\,dx=\int f(g(t))g'(t)\,dt$$

이처럼 변수 x를 t의 함수 $g(t)$로 바꾸어 적분하는 방법을 **치환적분법**이라고 한다.

합성함수의 미분법
$y=f(u)$, $u=g(x)$이면
$y=f(g(x))$의 도함수는
$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

치환적분법

$\int f(x)\,dx$에서 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $x=g(t)$로 놓으면

$$\int f(x)\,dx=\int f(g(t))g'(t)\,dt$$

함께하기 /

익힘책 17쪽 | 익힘책 19쪽 | 익힘책 20쪽

1 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int \cos(3x-2)dx$　　(2) $\int (2x-1)\sqrt{2x+1}\,dx$

(3) $\int \cos^3 x \sin x\,dx$

풀이

(1) $3x-2=t$로 놓으면 $x=\frac{t+2}{3}$이므로　$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{3}$

$$\therefore \int \cos(3x-2)dx=\int \cos t \cdot \frac{1}{3}dt=\frac{1}{3}\int \cos t\,dt$$

$$=\frac{1}{3}\sin t+C=\mathbf{\frac{1}{3}\sin(3x-2)+C}$$

(2) $\sqrt{2x+1}=t$로 놓으면 $x=\frac{t^2-1}{2}$이므로　$\frac{dx}{dt}=t$

$$\therefore \int (2x-1)\sqrt{2x+1}\,dx=\int (t^2-2)\cdot t\cdot t\,dt=\int (t^4-2t^2)dt$$

$$=\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+C=\frac{1}{15}t^3(3t^2-10)+C$$

$$=\mathbf{\frac{1}{15}(6x-7)(2x+1)\sqrt{2x+1}+C}$$

(3) $\cos x=t$로 놓으면　$-\sin x\frac{dx}{dt}=1$

$$\therefore \int \cos^3 x \sin x\,dx=\int t^3(-dt)=-\int t^3 dt$$

$$=-\frac{1}{4}t^4+C=\mathbf{-\frac{1}{4}\cos^4 x+C}$$

부정적분이 $\int f(g(x))g'(x)dx$의 꼴일 때, $g(x)=t$로 놓고 치환적분법을 이용하여 부정적분을 구한다.

스스로 하기 /

익힘책 17쪽 | 익힘책 19쪽 | 익힘책 20쪽

1 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int (3x-1)^5 dx$　　(2) $\int \sin\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)dx$

(3) $\int \sin^2 3x\,dx$　　(4) $\int x\sqrt{1-2x}\,dx$

(5) $\int 2xe^{x^2}dx$　　(6) $\int \sin^2 x\cos x\,dx$

알아보기 / $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$의 부정적분을 구하여 보자.

부정적분 $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$를 구하는 방법을 알아보자.

$\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$에서 $f(x)=t$로 놓으면 $f'(x)=\dfrac{dt}{dx}$이므로

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int \frac{1}{f(x)}f'(x)dx=\int \frac{1}{t}dt$$
$$=\ln|t|+C=\ln|f(x)|+C$$

그러므로 다음이 성립한다.

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$의 부정적분

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$$

분모의 도함수를 구하여 분자와 비교하여 보자.

| 보기 | (1) $\displaystyle\int \frac{4x+6}{x^2+3x-2}dx$에서 $(x^2+3x-2)'=2x+3$이므로

$$\int \frac{4x+6}{x^2+3x-2}dx=2\int \frac{2x+3}{x^2+3x-2}dx$$
$$=2\int \frac{(x^2+3x-2)'}{x^2+3x-2}dx$$
$$=2\ln|x^2+3x-2|+C$$

(2) $\displaystyle\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$에서 $(e^x+e^{-x})'=e^x-e^{-x}$이므로

$$\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx=\int \frac{(e^x+e^{-x})'}{e^x+e^{-x}}dx$$
$$=\ln(e^x+e^{-x})+C$$

$e^x+e^{-x}>0$이므로 $\ln|e^x+e^{-x}|=\ln(e^x+e^{-x})$

스스로 하기 /

익힘책 17쪽 | 익힘책 19쪽 | 익힘책 20쪽

2 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int \frac{3x^2-2}{x^3-2x+3}dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x-1}dx$

(3) $\displaystyle\int \tan x\,dx$ (4) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}dx$

알 아 보 기 / 분수함수의 부정적분을 구하여 보자.

분수함수의 부정적분을 구할 때 분자의 차수가 분모의 차수보다 높은 경우에는 분자를 분모로 나누어 몫과 나머지를 분리하여 적분한다.

또 분모가 인수분해 되는 경우에는 주어진 분수식을 간단한 분수식의 합의 꼴로 변형하여 구한다.

| 보기 | (1) $\int \frac{2x^2-3x-1}{x-2}dx$에서 $2x^2-3x-1$을 $x-2$로 나눈 몫은 $2x+1$이고 나머지는 1이므로

$$\int \frac{2x^2-3x-1}{x-2}dx=\int\left(2x+1+\frac{1}{x-2}\right)dx$$
$$=x^2+x+\ln|x-2|+C$$

(2) $\int \frac{x-1}{(x-2)(x+1)}dx$에서

$$\frac{x-1}{(x-2)(x+1)}=\frac{m}{x-2}+\frac{n}{x+1}$$

으로 놓고 양변에 $(x-2)(x+1)$을 곱하여 정리하면

$$x-1=(m+n)x+(m-2n)$$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로

$$m+n=1,\ m-2n=-1$$
$$\therefore m=\frac{1}{3},\ n=\frac{2}{3}$$

따라서 구하는 부정적분은

$$\int \frac{x-1}{(x-2)(x+1)}dx$$
$$=\int\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=\frac{1}{3}\ln|x-2|+\frac{2}{3}\ln|x+1|+C$$

스 스 로 하 기 / 익힘책 17쪽 | 익힘책 19쪽 | 익힘책 20쪽

3 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int \frac{2x^2-3x-4}{x+1}dx$ (2) $\int \frac{x+2}{(x+3)(x-1)}dx$

02 부분적분법

탐 구 하 기 / 곱의 미분법

다음 함수 $f(x)g(x)$를 미분하여 빈칸에 알맞은 것을 써넣어 보자.

$f(x)g(x)$	xe^x	$x\sin x$	$x\ln x$
$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$			

알 아 보 기 / 부분적분법에 대하여 알아보자.

x와 $\cos x$의 곱 $x\cos x$의 부정적분을 구하여 보자.

$(x\sin x)'=\sin x+x\cos x$이므로 이 식의 양변을 적분하면

$$x\sin x=\int(\sin x+x\cos x)dx=\int\sin x\,dx+\int x\cos x\,dx$$

$$\therefore \int x\cos x\,dx=x\sin x-\int\sin x\,dx$$

$$=x\sin x+\cos x+C$$

일반적으로 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 곱 $f(x)g(x)$를 미분하면

$$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

이므로 이 식의 양변을 적분하면

$$f(x)g(x)=\int f'(x)g(x)dx+\int f(x)g'(x)dx$$

$$\therefore \int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

즉, $\int f'(x)g(x)dx$를 구할 수 있으면 $\int f(x)g'(x)dx$를 구할 수 있다.

$\int f'(x)g(x)dx$를 쉽게 계산할 수 있도록 $f(x)$, $g(x)$를 정한다.

이와 같이 적분하는 방법을 **부분적분법**이라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

부분적분법

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때

$$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

$f(x)$ $g'(x)$

$f'(x)$ $g(x)$

$f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$

함께 하기 /

익힘책 17쪽 | 익힘책 19쪽 | 익힘책 20쪽

1 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int xe^x\,dx$　　　(2) $\int \ln x\,dx$

| 풀이 |

(1) $f(x)=x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면　$f'(x)=1$, $g(x)=e^x$

$$\therefore \int xe^x\,dx=xe^x-\int e^x\,dx=\boldsymbol{xe^x-e^x+C}$$

(2) $f(x)=\ln x$, $g'(x)=1$로 놓으면　$f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=x$

$$\therefore \int \ln x\,dx=x\ln x-\int \frac{1}{x}\cdot x\,dx=\boldsymbol{x\ln x-x+C}$$

피적분함수가 (다항함수)×(지수함수)일 때, 다항함수를 $f(x)$, 지수함수를 $g'(x)$로 놓는다.

피적분함수가 (다항함수)×(로그함수)일 때, 로그함수를 $f(x)$, 다항함수를 $g'(x)$로 놓는다.

2 부정적분 $\int x^2e^x\,dx$를 구하여라.

| 풀이 |

$f(x)=x^2$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면　$f'(x)=2x$, $g(x)=e^x$

$$\begin{aligned}\therefore \int x^2e^x\,dx&=x^2e^x-\int 2xe^x\,dx\\&=x^2e^x-2\left(xe^x-\int e^x\,dx\right)\\&=\boldsymbol{x^2e^x-2xe^x+2e^x+C}\end{aligned}$$

부분적분법을 두 번 적용한다.

스스로 하기 /

익힘책 17쪽 | 익힘책 19쪽 | 익힘책 20쪽

1 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int 3xe^{3x}\,dx$　　　(2) $\int 2x\sin x\,dx$

(3) $\int x\ln x\,dx$　　　(4) $\int 2\ln(2x+3)\,dx$

2 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int x^2\sin x\,dx$　　　(2) $\int (\ln x)^2\,dx$

$y=x^n$의 부정적분

계산

1 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int (x+1)(x+2)dx$ (2) $\int \frac{x^2-2x-1}{x^3}dx$

(3) $\int \frac{2x^2-3}{x^2}dx$ (4) $\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}dx$

삼각함수와 지수 함수의 부정적분

계산

2 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int (2\sin x-\cos x)dx$ (2) $\int (2^x-1)dx$

(3) $\int (3e^x-2^x)dx$ (4) $\int (\sec^2 x-\cos^2 x)dx$

치환적분법

이해

3 치환적분법을 이용하여 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int (2x-5)^4 dx$ (2) $\int x\sqrt{3x-2}\,dx$

부분적분법

이해

4 부분적분법을 이용하여 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int xe^{2x}dx$ (2) $\int (2x+1)\cos x\,dx$

종소리의 크기

문제 해결

5 어떤 종을 처음에 100 dB(데시벨)의 크기로 타종한 후 t초일 때의 소리의 크기를 $x(t)$ dB이라고 하면 소리의 크기가 줄어드는 속도는

$$x'(t)=-20\cdot e^{-\frac{t}{5}}\ (\text{dB/s})$$

이다. 타종한 후 5초일 때의 소리의 크기를 구하여라.

2 정적분

이 단원을 배우면

- 구분구적법을 이해하고, 이를 이용하여 간단한 도형의 넓이와 부피를 구할 수 있다.
- 정적분의 뜻을 알 수 있다.
- 부정적분과 정적분의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있다.
- 여러 가지 함수의 정적분을 구할 수 있다.

1 정적분의 뜻과 성질

2 정적분의 치환적분법과 부분적분법

1 정적분의 뜻과 성질

학습 목표

- 구분구적법을 이해하고 간단한 도형의 넓이와 부피를 구할 수 있다.
- 정적분의 뜻을 안다.
- 부정적분과 정적분의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있다.
- 정적분의 성질을 이해한다.

다 가 서 기 / **나일 강의 범람과 이집트의 토지 측량**

나일 강 하류에 위치한 이집트는 상습적인 홍수로 인해 상류에 있던 기름진 토사가 하류로 운반되면서 강 주변에 비옥한 평야를 갖게 되었다. 이 때문에 거름을 주지 않고도 농사를 잘 지을 수 있었다고 한다.

그런데 나일 강이 범람하고 나면 침수되어 사라지거나 새로 생겨나는 토지들이 발생하고 기존 토지의 경계선이 없어졌기 때문에 이때마다 땅을 적절하게 재분배할 필요성이 생겼다. 이런 이유로 고대 이집트에서는 다양한 토지 측량술이 발전하였다.

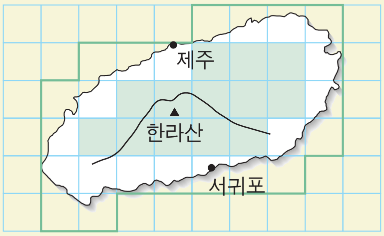
현대에는 토지를 측량하거나 건물의 부피를 구할 때에 적분법이 요긴하게 사용된다.

01 구분구적법

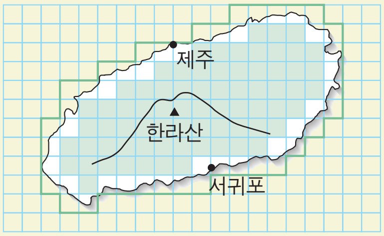
탐 구 하 기 / 제주도의 넓이

제주도의 넓이를 구하기 위하여 아래 그림과 같이 제주도의 축도 위에 한 변의 길이가 각각 1 cm, 0.5 cm, 0.25 cm인 정사각형 모눈을 그렸다.

| 그림 1 |



| 그림 2 |



| 그림 3 |

다음 물음에 답하여 보자.

1. 각 그림에서 제주도 안에 완전히 포함된 정사각형의 개수를 a, 제주도와 공통 부분을 가지는 정사각형의 개수를 b라 하고, 오른쪽 표를 완성하여라.

구분	그림 1	그림 2	그림 3
a			72
b			120

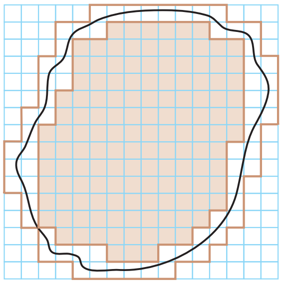
2. 각 그림에서 제주도 안에 완전히 포함된 정사각형들의 넓이의 합을 S, 제주도와 공통 부분을 가지는 정사각형들의 넓이의 합을 T라 하고, 오른쪽 표를 완성하여라.

구분	그림 1	그림 2	그림 3
S			4.5
T			7.5
$T-S$			3

3. 모눈의 한 변의 길이를 0.1 cm, 0.01 cm, ⋯와 같이 점점 작게 할 때, $T-S$의 값은 어떻게 변할지 추측하여라.

알 아 보 기 / 구분구적법에 대하여 알아보자.

오른쪽 그림과 같이 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하기 위하여 한 변의 길이가 $\frac{1}{n}$인 정사각형 모눈을 그려 보자.



주어진 도형의 넓이를 S라 하고, 도형의 안쪽에 완전히 포함된 정사각형들의 넓이의 합을 S_n, 도형과 공통 부분을 가지는 정사각형들의 넓이의 합을 T_n이라고 하면

$$S_n < S < T_n$$

여기서 모눈의 크기를 충분히 작게 하면, 즉 n을 한없이 크게 하면 S_n과 T_n은 S에 한없이 가까워진다.

다각형은 몇 개의 삼각형이나 사각형으로 나누어 그 넓이를 구할 수 있다. 그러나 직선과 곡선 또는 곡선과 곡선으로 둘러싸인 도형은 그와 같은 방법으로 구하기 어려우므로 극한의 개념을 이용한 구분구적법을 이용한다.

이와 같이 어떤 도형의 넓이 또는 부피를 구할 때, 주어진 도형을 넓이 또는 부피를 알고 있는 도형으로 세분하여 근삿값을 구한 뒤에 이 근삿값의 극한값으로 그 도형의 넓이와 부피를 구하는 방법을 **구분구적법**이라고 한다.

이제 곡선 $y=x^2$과 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 구분구적법으로 구하여 보자.

구간 $[0,\ 1]$을 n등분하면 양 끝점과 각 분점의 x좌표는 차례로

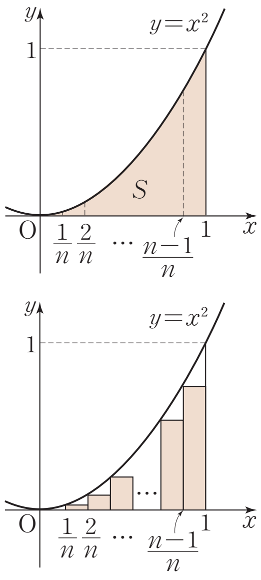
$$0,\ \frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \cdots,\ \frac{n-1}{n},\ \frac{n}{n}(=1)$$

이고, 이에 대응하는 곡선의 y좌표는 차례로

$$0,\ \left(\frac{1}{n}\right)^2,\ \left(\frac{2}{n}\right)^2,\ \cdots,\ \left(\frac{n-1}{n}\right)^2,\ \left(\frac{n}{n}\right)^2$$

이다. 이때, | 그림1 | 에서 색칠한 부분의 넓이를 S_n이라고 하면

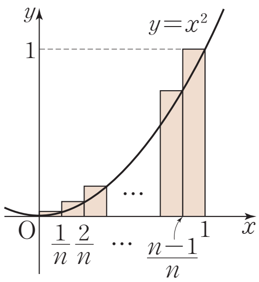
$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n}\cdot 0+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \\ &= \frac{1}{n^3}\{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2\} \\ &= \frac{1}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ &= \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$



| 그림1 |

또 | 그림2 | 에서 색칠한 부분의 넓이를 T_n이라고 하면

$$T_n=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2$$
$$=\frac{1}{n^3}\{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2+n^2\}$$
$$=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$



| 그림2 |

구하는 넓이 S에 대하여 $S_n<S<T_n$이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n\le S\le\lim_{n\to\infty}T_n$$

이 성립한다. 한편

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}$$
$$\lim_{n\to\infty}T_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}$$

이므로 $S=\frac{1}{3}$이다.

| 참고 | 함수 $y=x^2$과 같이 연속함수인 경우에는 $\lim_{n\to\infty}S_n$과 $\lim_{n\to\infty}T_n$ 중에서 어느 한쪽의 극한이 존재하면 나머지 한쪽의 극한이 반드시 존재하고, 그 값이 같으므로 $\lim_{n\to\infty}S_n$과 $\lim_{n\to\infty}T_n$ 중에서 하나만 구하면 된다.

스스로 하기 /

익힘책 25쪽 | 익힘책 27쪽 | 익힘책 29쪽

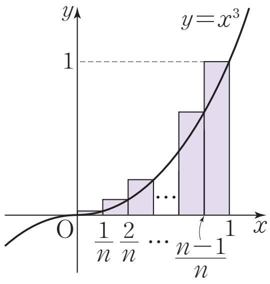
1 곡선 $y=x^3$과 두 직선 $x=0$, $x=1$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 구간 $[0,\ 1]$을 n등분하고 양 끝점과 각 분점의 x좌표를 차례로 구하여라.

(2) (1)에서 구한 x좌표에 대응하는 곡선의 y좌표를 차례로 구하여라.

(3) 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이를 구하여라.

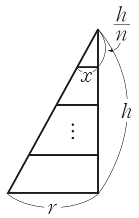
(4) S를 구하여라.



함께하기 /

익힘책 25쪽 | 익힘책 27쪽 | 익힘책 29쪽

1 밑면의 반지름의 길이가 r이고 높이가 h인 원뿔의 부피 V를 구분구적법으로 구하여라.



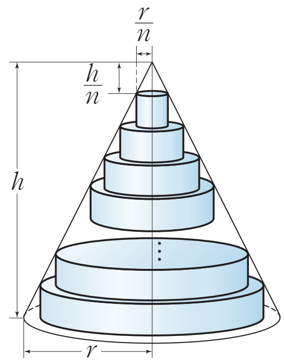
$x : r = \frac{h}{n} : h$

$\therefore x = \frac{r}{n}$

같은 방법으로 각 원기둥의 반지름의 길이를 구할 수 있다.

풀이

오른쪽 그림과 같이 원뿔의 높이를 n등분하고, 각 분점을 지나고 밑면에 평행한 평면으로 원뿔을 자른다.



이때, 자른 단면의 반지름의 길이는 위에서부터 차례로

$$\frac{r}{n},\ \frac{2r}{n},\ \frac{3r}{n},\ \cdots,\ \frac{(n-1)r}{n}$$

각 단면을 밑면으로 하고, $\frac{h}{n}$를 높이로 하는 $(n-1)$개의 원기둥의 부피의 합을 V_n이라고 하면

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{h}{n}\left[\pi\left(\frac{r}{n}\right)^2+\pi\left(\frac{2r}{n}\right)^2+\pi\left(\frac{3r}{n}\right)^2+\cdots+\pi\left\{\frac{(n-1)r}{n}\right\}^2\right] \\ &= \frac{\pi r^2 h}{n^3}\{1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2\} \\ &= \frac{\pi r^2 h}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ &= \frac{1}{6}\pi r^2 h\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

따라서 구하는 원뿔의 부피 V는

$$\begin{aligned} V &= \lim_{n\to\infty} V_n \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\pi r^2 h\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{3}\pi r^2 h} \end{aligned}$$

스스로 하기 /

익힘책 25쪽 | 익힘책 27쪽 | 익힘책 29쪽

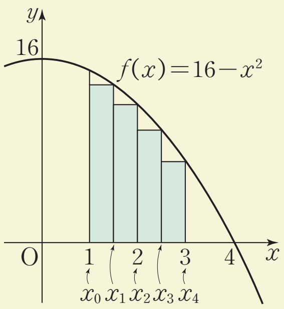
루브르 박물관
프랑스 파리에 있는 세계적인 박물관으로 1793년에 설립되었다.

2 루브르 박물관은 오른쪽 그림과 같이 입구가 거대한 유리 피라미드로 되어 있다. 이 피라미드의 밑넓이가 S, 높이가 h일 때, 구분구적법을 이용하여 피라미드의 부피가 $\frac{1}{3}Sh$임을 보여라.

02 정적분

탐 구 하 기 / 직선과 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이의 근삿값

오른쪽 그림을 이용하여 함수 $f(x)=16-x^2$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이의 근삿값을 구할 수 있다. 다음의 순서에 의하여 아래의 표에 알맞은 것을 써넣어 보자.



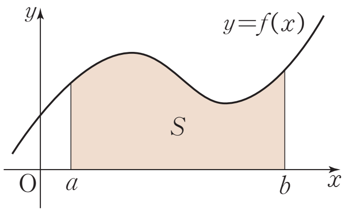
1. 구간 $[1,\ 3]$을 4등분하여 양 끝점과 각 분점의 x좌표 x_0, x_1, x_2, x_3, x_4를 각각 구하여라.
2. $f(x_k)$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$의 값을 각각 구하여라.
3. 색칠한 4개의 직사각형의 넓이의 합을 구하여라.

순서 \ k	0	1	2	3	4	합
1. x_k	1	1.5	2		3	
2. $f(x_k)$		13.75				
3. $(x_k-x_{k-1})f(x_k)$						

알 아 보 기 / 정적분의 뜻을 알아보자.

오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고, $f(x)\geq 0$이라고 하자.

이때, 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $x=a$, $x=b$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 구분구적법으로 구하여 보자.



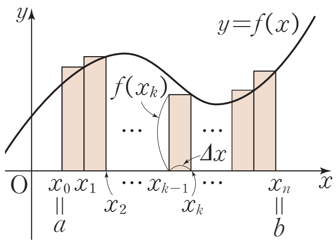
구간 $[a,\ b]$를 n등분하여 양 끝점과 각 분점의 x좌표를 차례로

$$x_0(=a),\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k,\ \cdots,\ x_n(=b)$$

이라 하고, 구간 $[x_{k-1},\ x_k]$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$의 길이를 $\varDelta x$라고 하면

$$\varDelta x=\frac{b-a}{n}$$

오른쪽 그림과 같이 Δx를 밑변으로 하고 높이가 $f(x_k)$인 직사각형의 넓이의 합을 S_n이라고 하면



$$S_n=f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+\cdots$$
$$+f(x_k)\Delta x+\cdots+f(x_n)\Delta x$$
$$=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

이므로 구하는 넓이 S는 다음과 같다.

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

일반적으로 함수 $y=f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 극한값

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

가 존재한다.

정적분을 영어로 definite integral이라고 한다.

이때, 이 극한값을 함수 $y=f(x)$의 a에서 b까지의 **정적분**이라 하고, 기호로

$$\int_a^b f(x)dx$$

와 같이 나타낸다.

정적분 $\int_a^b f(x)dx$를 '구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)$의 정적분' 또는 '인티그럴 a부터 b까지 $f(x)dx$' 라고 읽는다.

여기서 a를 정적분의 **아래끝**, b를 **위끝**이라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

정적분의 정의

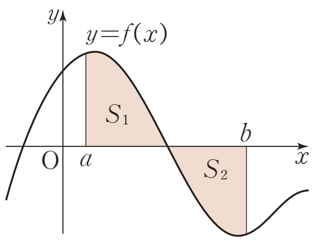
함수 $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

$$\left(\text{단, } \Delta x=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+k\Delta x\right)$$

부정적분 $\int f(x)dx$는 함수이지만 정적분 $\int_a^b f(x)dx$는 실수이다.

한편 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 양의 값과 음의 값을 모두 가지면 정적분 $\int_a^b f(x)dx$는 $f(x)$가 양인 부분의 넓이 S_1에서 $f(x)$가 음인 부분의 넓이 S_2를 뺀 값을 나타낸다.



함 께 하 기 /

익힘책 25쪽 | 익힘책 27쪽 | 익힘책 29쪽

1 정적분의 정의를 이용하여 $\int_0^1 (x^2-1)dx$를 구하여라.

풀이

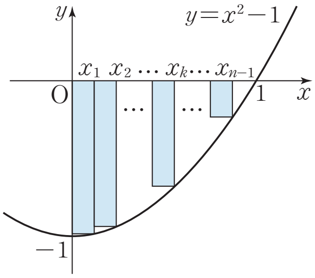
아래끝이 0이고 위끝이 1이므로 구간 $[0,\ 1]$을 n등분하여 양 끝점과 각 분점의 x좌표를

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k,\ \cdots,\ x_n$$

이라고 하면 구간

$$[x_{k-1},\ x_k]\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

의 길이 $\varDelta x$와 x_k는



$$\varDelta x=\frac{1-0}{n}=\frac{1}{n}$$

$$x_k=0+k\varDelta x=\frac{k}{n}$$

또 $f(x)=x^2-1$이므로

$$f(x_k)=x_k{}^2-1=\left(\frac{k}{n}\right)^2-1$$

$$f(x_k)\varDelta x=\left\{\left(\frac{k}{n}\right)^2-1\right\}\frac{1}{n}=\left(\frac{k^2}{n^2}-1\right)\frac{1}{n}$$

정적분의 정의에 의하여 구하는 값은

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x^2-1)dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\varDelta x\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^2}{n^2}-1\right)\frac{1}{n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2-1\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-1\right\}\\ &= \frac{1}{3}-1=-\frac{2}{3}\end{aligned}$$

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}1=1$

구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)<0$이면 $f(x_k)<0$, $\varDelta x>0$이므로
$\int_a^b f(x)dx$
$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\varDelta x<0$

스 스 로 하 기 /

익힘책 25쪽 | 익힘책 27쪽 | 익힘책 29쪽

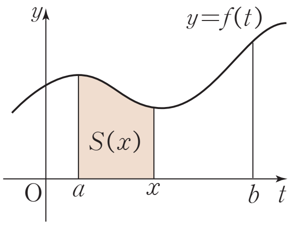
1 정적분의 정의를 이용하여 다음을 구하여라.

(1) $\int_0^2 2x\,dx$　　　(2) $\int_{-1}^1 (4-x^2)dx$

03 정적분의 기본 정리

알 아 보 기 / 정적분과 부정적분의 관계를 알아보자.

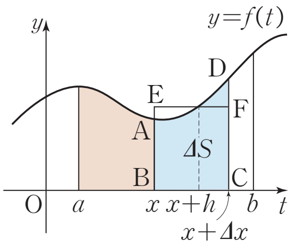
적분과 미분의 관계, 정적분과 부정적분의 관계를 알아보고, 이를 이용하여 정적분을 간편하게 구하는 방법을 알아보자.



함수 $y=f(t)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(t)\geq 0$일 때, 오른쪽 그림과 같이 구간 $[a,\ b]$에 속하는 임의의 x에 대하여 a에서 x까지의 넓이를 $S(x)$라고 하면

$$S(x)=\int_a^x f(t)dt$$

$\int_a^x f(t)dt$는 x의 값에 따라 변하므로 x의 함수이다.



이다. 여기서 x의 증분 Δx에 대한 $S(x)$의 증분을 ΔS라고 하면 오른쪽 그림에서 ΔS는 도형 ABCD의 넓이이다.

도형 ABCD와 넓이가 같도록 직사각형 EBCF를 만들면 변 EF는 곡선과 만난다.

이때, 교점의 x좌표를 $x+h$라고 하면

$$\Delta S=f(x+h)\Delta x \qquad \therefore \frac{\Delta S}{\Delta x}=f(x+h)$$

여기서 $0\leq h\leq \Delta x$이거나 $\Delta x\leq h\leq 0$이므로 Δx의 값이 0에 한없이 가까워지면 h의 값도 0에 한없이 가까워진다. 그러므로 다음이 성립한다.

$$S'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}f(x+h)=f(x)$$

즉, 넓이를 나타내는 함수 $S(x)$의 도함수는 $f(x)$와 같다.

일반적으로 적분과 미분 사이에는 다음 관계가 성립한다.

적분과 미분의 관계

함수 $f(t)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고, $a\leq x\leq b$일 때

$$S(x)=\int_a^x f(t)dt\text{이면} \qquad S'(x)=f(x)$$

$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$

| 보기 | $\frac{d}{dx}\int_2^x (t^2+3t+2)dt=x^2+3x+2$

$S(a)$는 a에서 a까지의 넓이이므로 0이다.

앞의 적분과 미분의 관계에서 $S'(x)=f(x)$이므로 $S(x)$는 $f(x)$의 한 부정적분이다.

여기서 $f(x)$의 또 다른 부정적분 중 하나를 $F(x)$라고 하면

$$S(x)=F(x)+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이다.

한편 $S(x)$의 정의에서 $S(a)=0$이므로 ㉠에 $x=a$를 대입하면

$$S(a)=F(a)+C=0$$

$$\therefore C=-F(a) \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$S(x)=F(x)-F(a)$$

즉

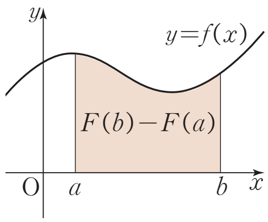
$$\int_a^x f(t)dt=S(x)=F(x)-F(a)$$

이 식의 위끝에 $x=b$를 대입하면

$$\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$$

또 적분변수 t를 x로 바꾸면 다음과 같다.

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$



이때, 우변 $F(b)-F(a)$를 기호로

$$\Big[F(x)\Big]_a^b$$

와 같이 나타낸다.

이상을 정리하면 다음과 같은 **정적분의 기본 정리**를 얻는다.

정적분의 기본 정리

함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속이고, $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$$

| 참고 | 정적분의 기본 정리를 이용하면 다음이 성립함을 알 수 있다.

(1) $\int_a^a f(x)dx=0$

(2) $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

함께하기 /

익힘책 25쪽 | 익힘책 27쪽 | 익힘책 29쪽

1 임의의 실수 x에 대하여 $\int_a^x f(t)dt = x^2-4x+4$를 만족시키는 함수 $f(x)$와 a의 값을 구하여라.

적분과 미분의 관계를 이용한다.

풀이

주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=2x-4$$

또 주어진 식에 $x=a$를 대입하면 $\int_a^a f(t)dt=0$이므로

$$0=a^2-4a+4$$

$$\therefore a=2$$

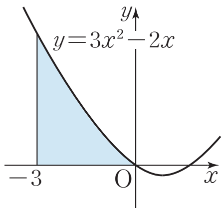
2 정적분 $\int_{-3}^0 (3x^2-2x)dx$를 구하여라.

피적분함수의 부정적분을 먼저 구한다.

풀이

$3x^2-2x$의 한 부정적분이 x^3-x^2이므로

$$\int_{-3}^0 (3x^2-2x)dx = \Big[x^3-x^2\Big]_{-3}^0$$
$$=0-(-27-9)$$
$$=36$$



스스로 하기 /

익힘책 25쪽 | 익힘책 27쪽 | 익힘책 29쪽

1 임의의 실수 x에 대하여 $\int_a^x f(t)dt = x^2-2x-8$을 만족시키는 함수 $f(x)$와 양수 a의 값을 구하여라.

2 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_1^3 dx$ (2) $\int_{-1}^2 2x\,dx$

(3) $\int_{-2}^3 (3x^2-4x)dx$ (4) $\int_1^0 (4x^3+3x^2)dx$

04 정적분의 성질

알 아 보 기 / 정적분의 성질을 알아보자.

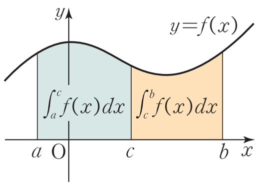
함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면 $\int kf(x)dx=kF(x)+C$ (k는 상수)이므로

$$\int_a^b kf(x)dx=\Big[kF(x)\Big]_a^b=kF(b)-kF(a)$$
$$=k\{F(b)-F(a)\}=k\Big[F(x)\Big]_a^b$$
$$=k\int_a^b f(x)dx$$

가 성립한다. 또 임의의 실수 c에 대하여

$$\int_a^c f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^c=F(c)-F(a)$$
$$\int_c^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_c^b=F(b)-F(c)$$

이므로



$$\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\{F(c)-F(a)\}+\{F(b)-F(c)\}$$
$$=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx$$

가 성립한다.

일반적으로 다음과 같은 정적분의 성질이 성립한다.

정적분의 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 세 실수 a, b, c를 포함하는 구간에서 연속일 때

[1] $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$ (단, k는 상수)

[2] $\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

[3] $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$

[4] $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

정적분의 성질 [4]는 $a<c<b$가 아닐 때에도 성립한다.

함께 하기 /

익힘책 25쪽 | 익힘책 27쪽 | 익힘책 29쪽

1 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_{-2}^{1}(x+1)^3dx-\int_{-2}^{1}(x-1)^3dx$

(2) $\int_{1}^{3}(3x^2+e^x)dx$

풀이

(1) $\int_{-2}^{1}(x+1)^3dx-\int_{-2}^{1}(x-1)^3dx$

$=\int_{-2}^{1}\{(x+1)^3-(x-1)^3\}dx$

$=\int_{-2}^{1}(6x^2+2)dx=\int_{-2}^{1}6x^2dx+\int_{-2}^{1}2\,dx$

$=\Big[2x^3\Big]_{-2}^{1}+\Big[2x\Big]_{-2}^{1}$

$=\{2-(-16)\}+\{(2-(-4)\}=$**24**

(2) $\int_{1}^{3}(3x^2+e^x)$

$=\int_{1}^{3}3x^2\,dx+\int_{1}^{3}e^x\,dx=\Big[x^3\Big]_{1}^{3}+\Big[e^x\Big]_{1}^{3}$

$=(27-1)+(e^3-e)=\mathbf{26+e^3-e}$

$\int_{-2}^{1}(6x^2+2)dx$
$=\Big[2x^3+2x\Big]_{-2}^{1}$
로 계산해도 된다.

스스로 하기 /

익힘책 25쪽 | 익힘책 27쪽 | 익힘책 29쪽

1 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_{1}^{3}(x^2+2x)dx$

(2) $\int_{-1}^{2}(4x^3-3x^2+1)dx-\int_{-1}^{2}(4x^3+3x^2-2x)dx$

2 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_{1}^{4}\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$

(2) $\int_{1}^{3}(e^x+e^{-x})^2\,dx$

(3) $\int_{1}^{4}\frac{3x^3-2x^2+4}{x^2}\,dx$

(4) $\int_{1}^{2}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx$

함 께 하 기 /

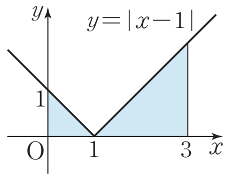
익힘책 25쪽 | 익힘책 27쪽 | 익힘책 29쪽

2 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int_0^3 |x-1|\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^\pi |\cos x|\,dx$

풀이

(1) 피적분함수를 $f(x)$라고 하면



$$f(x)=|x-1|=\begin{cases} x-1 & (x\ge1) \\ -x+1 & (x\le1) \end{cases}$$

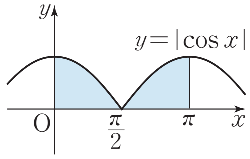
$x\le1$일 때
$f(x)=-(x-1)$
$=-x+1$

이므로 구간을 나누어 계산하면

$$\int_0^3|x-1|\,dx=\int_0^1(-x+1)\,dx+\int_1^3(x-1)\,dx$$
$$=\left[-\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1+\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^3$$
$$=\left(-\frac{1}{2}+1\right)+\left\{\left(\frac{9}{2}-3\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right\}=\mathbf{\frac{5}{2}}$$

(2) $\cos x=0$에서 $x=\dfrac{\pi}{2}$

$\cos x\ge0$, $\cos x\le0$인 구간으로 나누어 생각한다.



$0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$일 때, $|\cos x|=\cos x$

$\dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi$일 때, $|\cos x|=-\cos x$

따라서 구간을 나누어 계산하면

$$\int_0^\pi|\cos x|\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos x)\,dx$$
$$=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\Big[-\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$
$$=(1-0)+\{0-(-1)\}=\mathbf{2}$$

스 스 로 하 기 /

익힘책 25쪽 | 익힘책 27쪽 | 익힘책 29쪽

3 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int_{-1}^2|2x-1|\,dx$ (2) $\displaystyle\int_{-1}^2|x^2+2x-3|\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1|e^x-2|\,dx$ (4) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}|\sin x|\,dx$

2 정적분의 치환적분법과 부분적분법

학습 목표

- 정적분의 치환적분법을 이해한다.
- 정적분의 부분적분법을 이해한다.

다 가 서 기 / 된장찌개와 포크

돈가스를 먹을 때에는 포크와 칼을 주로 사용하지만 된장찌개를 먹을 때에는 수저를 사용한다. 이와 같이 정적분에서도 피적분함수 $f(x)$에서 x에 대한 식을 다른 문자로 치환하면 적분하는 구간도 바꾸어야 한다.

01 정적분의 치환적분법

탐 구 하 기 / 치환하여 나타내기

$\int_0^1 2x(x^2+1)^{10}\,dx$에서 $x^2+1=t$라고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.

1. $x=0$, $x=1$일 때, t의 값을 각각 구하여라.
2. 구간 $[0,\ 1]$에서 $t=x^2+1$은 일대일 대응임을 조사하여라.
3. $\dfrac{dt}{dx}$를 구하고, $x\,dx$를 dt로 나타내어라.
4. 주어진 정적분을 t에 대한 정적분으로 나타내어라.

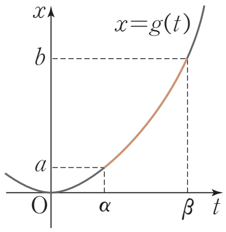
알 아 보 기 / 부정적분의 치환적분법을 이용하여 정적분을 구하여 보자.

부정적분의 치환적분법에서는 $F(x)=\int f(x)dx$ ($\cdots$ ㉠)를 구할 때, $x=g(t)$로 놓고 다음을 계산한다.

$$F(x)=F(g(t))=\int f(g(t))g'(t)dt \qquad \cdots \text{㉡}$$

한편 ㉠에서

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a) \qquad \cdots \text{㉢}$$



$x=g(t)$를 생각할 때 함수 g는 주어진 구간에서 일대일 대응이고 미분가능해야 한다.

또 $x=g(t)$에서 $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$라고 하면 ㉡에서

$$\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt=\Big[F(g(t))\Big]_\alpha^\beta$$

$$=F(g(\beta))-F(g(\alpha))=F(b)-F(a) \qquad \cdots \text{㉣}$$

따라서 ㉢, ㉣로부터 다음과 같은 정적분의 치환적분법을 얻는다.

정적분의 치환적분법

구간 $[a,\ b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 미분가능한 함수 $x=g(t)$의 도함수 $g'(t)$가 구간 $[\alpha,\ \beta]$에서 연속이고, $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$이면

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

함께 하기 /

익힘책 32쪽 | 익힘책 33쪽 | 익힘책 35쪽

1 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int_0^1 12x(x^2+1)^5\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^2 \frac{3x^2}{x^3+1}\,dx$

풀이

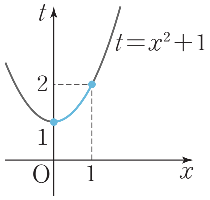
(1) $x^2+1=t$로 놓으면

$$2x\frac{dx}{dt}=1$$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=2$이므로

0≤x≤1에서 x의 값과 t의 값은 일대일 대응이다.

$$\int_0^1 12x(x^2+1)^5\,dx=\int_1^2 6t^5\,dt$$
$$=\Big[t^6\Big]_1^2$$
$$=63$$



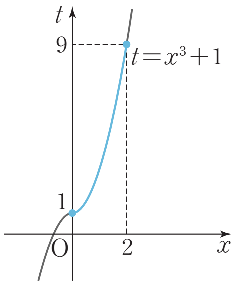
(2) $x^3+1=t$로 놓으면

$$3x^2\frac{dx}{dt}=1$$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=2$일 때 $t=9$이므로

0≤x≤2에서 x의 값과 t의 값은 일대일 대응이다.

$$\int_0^2 \frac{3x^2}{x^3+1}\,dx=\int_1^9 \frac{1}{t}\,dt$$
$$=\Big[\ln|t|\Big]_1^9$$
$$=2\ln 3$$



스스로 하기 /

익힘책 32쪽 | 익힘책 33쪽 | 익힘책 35쪽

1 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int_0^1 (2x-3)^4\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^1 x(1+x^2)^5\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{5x^2+4}\,dx$ (4) $\displaystyle\int_0^2 xe^{x^2}\,dx$

(5) $\displaystyle\int_{-2}^1 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx$ (6) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{1+2x^2}\,dx$

함 께 하 기 /

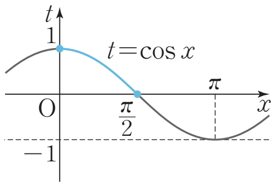
익힘책 32쪽 | 익힘책 33쪽 | 익힘책 35쪽

2 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos^2 x \sin x\,dx$ (2) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x\,dx$

풀이

(1) $\cos x = t$로 놓으면



$$-\sin x \frac{dx}{dt} = 1$$

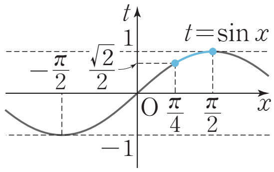
$x=0$일 때 $t=1$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=0$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos^2 x \sin x\,dx = \int_0^1 3t^2\,dt$$
$$= \Big[t^3\Big]_0^1$$
$$= \mathbf{1}$$

$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$에서 x의 값과 t의 값은 일대일 대응이다.

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos^2 x \sin x\,dx$
$\displaystyle= \int_1^0 3t^2(-1)\,dt$
$\displaystyle= -\int_1^0 3t^2\,dt$
$\displaystyle= \int_0^1 3t^2\,dt$

(2) $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$이므로 $\sin x = t$로 놓으면



$$\cos x \frac{dx}{dt} = 1$$

$x=\frac{\pi}{4}$일 때 $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이므로

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$$
$$= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{1}{t}\,dt = \Big[\ln|t|\Big]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1$$
$$= \mathbf{\frac{1}{2}\ln 2}$$

$\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2}$에서 x의 값과 t의 값은 일대일 대응이다.

스 스 로 하 기 /

익힘책 32쪽 | 익힘책 33쪽 | 익힘책 35쪽

2 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin x\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx$ (4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx$

(5) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$ (6) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{2}{x\ln x}\,dx$

02 정적분의 부분적분법

알 아 보 기 / 정적분의 부분적분법에 대하여 알아보자.

두 함수의 곱을 미분하면 $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로

$$\begin{aligned}\int_a^b \{f(x)g(x)\}'dx &= \int_a^b \{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\}dx \\ &= \int_a^b f'(x)g(x)dx+\int_a^b f(x)g'(x)dx\end{aligned}$$

가 성립한다.

한편 $\int_a^b \{f(x)g(x)\}'dx=\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b$이므로 다음과 같은 정적분의 부분적분법을 얻을 수 있다.

정적분의 부분적분법

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능하고 $f'(x)$, $g'(x)$가 연속일 때

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx=\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$$

| 보기 | $\int_1^e x\ln x\,dx$에서 $f(x)=\ln x$, $g'(x)=x$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{x^2}{2}$이므로

$$\begin{aligned}\int_1^e x\ln x\,dx &= \Big[\frac{x^2}{2}\ln x\Big]_1^e-\int_1^e \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}dx \\ &= \frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\int_1^e x\,dx \\ &= \frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_1^e=\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}\end{aligned}$$

스 스 로 하 기 / 익힘책 32쪽 | 익힘책 33쪽 | 익힘책 35쪽

1 다음 정적분을 구하여라.

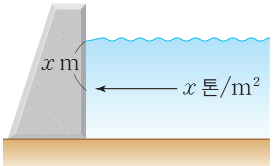
(1) $\int_1^e \ln x\,dx$　　(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$

(3) $\int_0^1 x^2e^x\,dx$　　(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x\,dx$

댐의 설계와 적분법

물을 가두고 있는 댐은 엄청난 수압을 받는다. 그러므로 댐을 설계할 때에는 이 점을 중요하게 고려해야 한다.

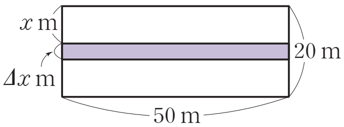
수면으로부터 깊이가 x m인 지점에서 댐에 수직으로 미치는 수압은 x 톤/m^{2}이다. (x 톤/m^{2}는 1 m^{2}당 x 톤의 힘을 받는 것과 같다.) 이를테면 깊이가 10 m인 곳에서는 10 톤/m^{2}의 압력을 받는다.



폭이 50 m인 댐에 20 m 높이까지 물이 찼을 때, 이 댐에 미치는 힘을 구하여 보자.

일반적으로 단위 넓이에 미치는 힘이 압력이므로 어떤 물체에 미치는 힘은 (압력)×(넓이)로 구할 수 있다.

한편 수면에서 깊이가 x m인 지점에서 $(x+\varDelta x)$ m인 지점까지의 부분의 넓이는 $50\varDelta x$ m^{2}이다.



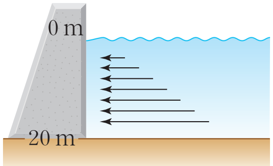
또 이 부분의 수압은 x 톤/m^{2}이므로 여기에 미치는 힘은

$$50x\varDelta x \text{ 톤}$$

이므로 구하는 힘은 이들을 0 m에서 20 m까지 더하면 된다.

즉, 구하는 힘은 다음과 같다.

$$\int_0^{20} 50x\,dx = \Big[\,25x^2\,\Big]_0^{20} = 10000(\text{톤})$$



새로 나온 용어와 기호

구분구적법, 정적분, 아래끝, 위끝, 정적분의 기본 정리, $\int_a^b f(x)dx$, $\left[F(x)\right]_a^b$

구분구적법

계산

1 구분구적법을 이용하여 $\int_0^2 x(2-x)dx$를 구하여라.

정적분

계산

2 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}dx$

(2) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}dx$

(3) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx$

(4) $\int_0^{\ln 2}(e^x-e^{-x})^2dx$

절댓값이 있는 정적분

이해

3 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_{-2}^2 |x+1|dx$

(2) $\int_{-1}^1 |x^2-1|dx$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\sin x-\frac{1}{2}\right|dx$

(4) $\int_0^2 |2^x-2|dx$

치환적분법과 부분적분법

이해

4 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_0^3 \frac{x}{x^2+1}dx$

(2) $\int_0^1 xe^x dx$

기계의 유지, 보수

문제 해결

5 어떤 회사에서 기계를 구입하였다. 이 회사는 구입한 지 t년이 지났을 때, 이 기계를 유지, 보수하는 비용의 평균 증가율 $M(t)$를 다음과 같이 예상하고 있다.

$$M(t)=1.2t+1.2^t\ln 1.2 \ (\text{백만 원/년})$$

구입한 지 7년 동안 유지, 보수하는 데 드는 비용을 구하여라.

(단, $1.2^7=3.6$으로 계산한다.)

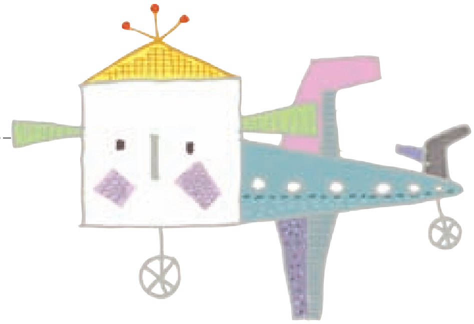
3

정적분의 활용

이 단원을 배우면

- 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
- 입체도형의 부피를 구할 수 있다.
- 회전체의 부피를 구할 수 있다.
- 정적분을 이용하여 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.

1 도형의 넓이



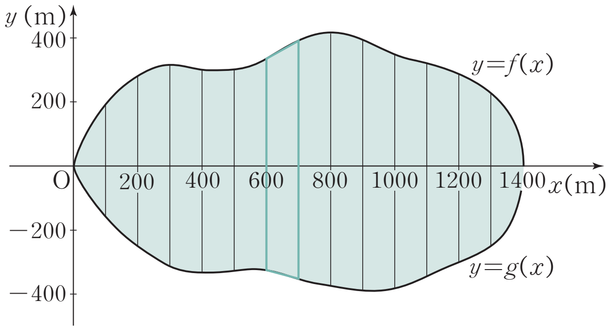
학습 목표

- 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
- 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
- 곡선과 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

다 가 서 기 / 오염 해역의 넓이

유조선의 기름이 바다로 유출되는 사고가 발생하면 그 실태를 파악하기 위하여 유출된 기름으로 오염된 해역의 넓이를 구해야 한다.

오염된 해역의 항공 사진을 찍어 기름이 덮인 부분을 좌표평면에 나타낸 것이 다음 그림과 같다고 하자.



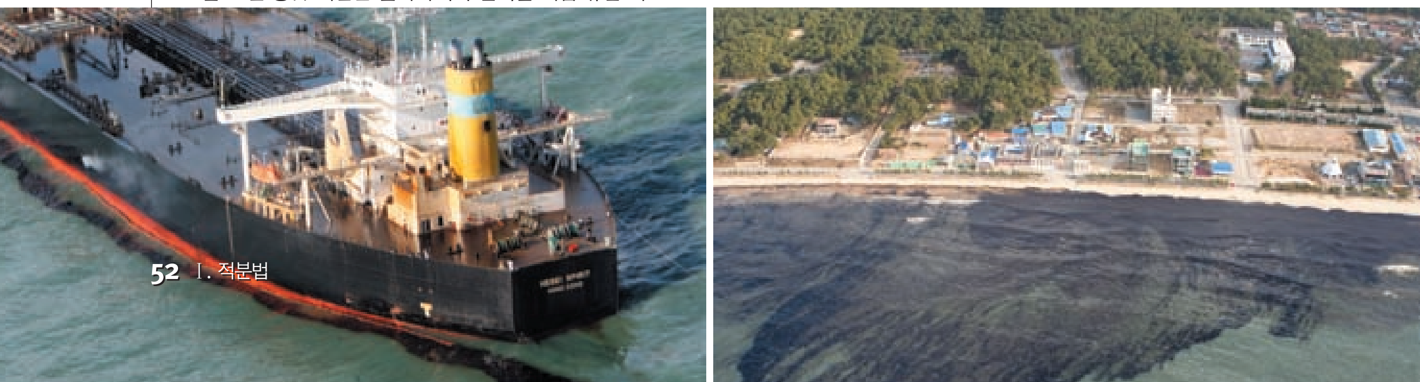
이때, 오염된 해역의 넓이 S는

$$S=\int_{0}^{1400}\{f(x)-g(x)\}dx$$

이다. 그런데 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 식을 정확히 알 수 없으므로 위의 그림과 같이 사다리꼴로 세분하여 그 넓이의 근삿값을 구할 수 있다. 이와 같은 방법을 심프슨 공식이라고 한다. 이는 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 근사적으로 구하는 데 많이 사용된다.

심프슨 공식은 영국의 수학자 심프슨(Simpson, T. ; 1710~1761)이 발견하였다.

2007년 12월 충남 태안군 앞바다에서 일어난 기름 유출 사고



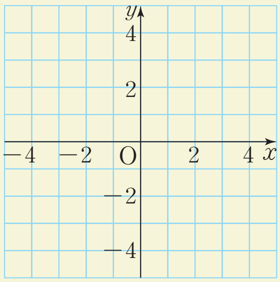
01 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이

탐 구 하 기 / 조건을 만족하는 구간 찾기

두 함수

$$f(x)=x^2-2x$$
$$g(x)=x^3-3x^2-x+3$$

에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.



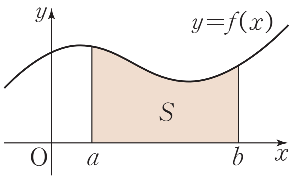
1. 오른쪽 좌표평면에 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프를 그려라.
2. 각 함수에 대하여 함숫값이 0 이상이 되는 구간을 구하여라.

알 아 보 기 / 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여 보자.

함수 $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 구하여 보자.

(i) 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)\geq 0$일 때

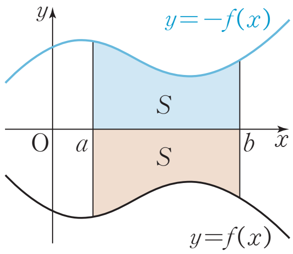
$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$



(ii) 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)\leq 0$일 때

곡선 $y=f(x)$는 곡선 $y=-f(x)$와 x축에 대하여 대칭이고, $-f(x)\geq 0$이므로

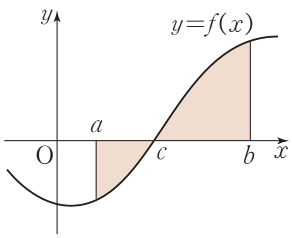
$$S=\int_a^b \{-f(x)\}\,dx$$
$$=\int_a^b |f(x)|\,dx$$



$f(x)\leq 0$일 때, $\int_a^b f(x)dx$의 값은 음수가 되므로 넓이를 구할 때에는 $-f(x)$의 정적분을 구해야 한다.

(iii) 구간 $[a,\ c]$에서 $f(x)\leq 0$이고, 구간 $[c,\ b]$에서 $f(x)\geq 0$일 때

$$S=\int_a^c \{-f(x)\}\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$
$$=\int_a^c |f(x)|\,dx+\int_c^b |f(x)|\,dx$$
$$=\int_a^b |f(x)|\,dx$$



이상을 정리하면 다음과 같다.

곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이

함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)|dx$$

함 께 하 기 /

익힘책 39쪽 | 익힘책 40쪽 | 익힘책 42쪽

1 다음에 주어진 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

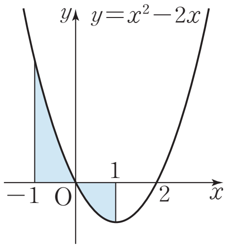
(1) $y=x^2-2x$, x축, $x=-1$, $x=1$

(2) $y=\sin x\ (0\le x\le \pi)$, x축

그래프를 그려서 $f(x)\ge 0$인 구간과 $f(x)\le 0$인 구간으로 나누어 적분한다.

풀이

(1) $f(x)=x^2-2x$로 놓으면 구간 $[-1, 0]$에서 $f(x)=x^2-2x\ge 0$이고, 구간 $[0, 1]$에서 $f(x)=x^2-2x\le 0$이므로

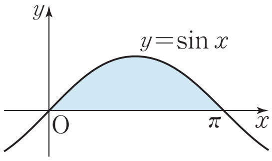


$$S=\int_{-1}^{0}(x^2-2x)dx+\int_0^1(-x^2+2x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^1$$

$$=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}=\mathbf{2}$$

(2) $S=\displaystyle\int_0^{\pi}\sin x\,dx$



$$=\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}$$

$$=-\cos\pi+\cos 0=\mathbf{2}$$

스 스 로 하 기 /

익힘책 39쪽 | 익힘책 40쪽 | 익힘책 42쪽

1 다음에 주어진 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(1) $y=x(x+2)(x-4)$, x축

(2) $y=\dfrac{1}{x}$, x축, $x=-e$, $x=-1$

02 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이

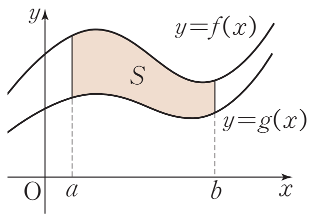
알 아 보 기 / 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여 보자.

이제 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하는 방법을 알아보자.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 구하여 보자.

(ⅰ) 구간 $[a,\ b]$에서 $0 \le g(x) \le f(x)$일 때

$$S=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$$
$$=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$

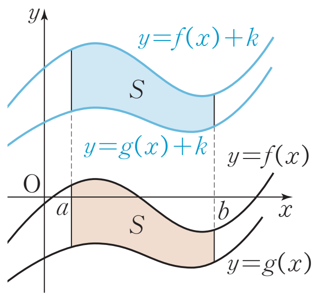


(ⅱ) 구간 $[a,\ b]$에서 $g(x) \le f(x)$이지만 $g(x)$ 또는 $f(x)$가 음의 값을 가질 때 오른쪽 그림과 같이 두 곡선을 y축의 양의 방향으로 k만큼 평행이동 하여

$$0 \le g(x)+k \le f(x)+k$$

가 되도록 한다.

이때, 평행이동 한 도형의 넓이는 변하지 않으므로 구하는 넓이 S는



$$S=\int_a^b \{f(x)+k\}dx-\int_a^b \{g(x)+k\}dx$$
$$=\int_a^b [\{f(x)+k\}-\{g(x)+k\}]dx$$
$$=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$

구간 $[a,\ b]$에서 $f(x) \le g(x)$일 때에도 (ⅰ), (ⅱ)와 같은 방법으로 하면 $S=\int_a^b \{g(x)-f(x)\}dx$

일반적으로 다음이 성립한다.

두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이

구간 $[a,\ b]$에서 연속인 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

함께 하기 /

익힘책 39쪽 | 익힘책 40쪽 | 익힘책 42쪽

1 다음 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(1) $y=x^2-2x-1,\ y=x-1$

(2) $y=2\sin x,\ y=\sin 2x,\ x=0,\ x=\pi$

풀이

적분 구간을 찾기 위하여 두 곡선의 교점의 x좌표를 구한다.

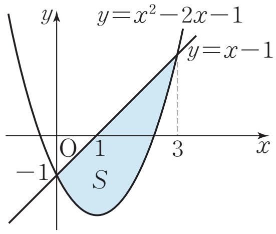
(1) 주어진 곡선과 직선의 교점의 x좌표는 $x^2-2x-1=x-1$에서

$x=0,\ x=3$

이때, 구간 $[0,\ 3]$에서

$x-1\ge x^2-2x-1$이므로 구하는 넓이

S는



$$S=\int_0^3\{(x-1)-(x^2-2x-1)\}dx$$

$$=\int_0^3(-x^2+3x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3=\mathbf{\frac{9}{2}}$$

$2\sin x-\sin 2x=0$
$2\sin x-2\sin x\cos x=0$
$2\sin x(1-\cos x)=0$
$\sin x=0$ 또는 $\cos x=1$
$\therefore\ x=0$ 또는 $x=\pi$

(2) 주어진 두 곡선의 교점의 x좌표는

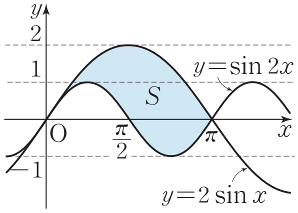
$2\sin x=\sin 2x\ (0\le x\le\pi)$에서

$x=0,\ x=\pi$

이때, 구간 $[0,\ \pi]$에서

$2\sin x\ge\sin 2x$이므로 구하는 넓이

S는



$$S=\int_0^\pi(2\sin x-\sin 2x)dx$$

$$=\left[-2\cos x+\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^\pi=\mathbf{4}$$

스스로 하기 /

익힘책 39쪽 | 익힘책 40쪽 | 익힘책 42쪽

1 다음 곡선과 직선 또는 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(1) $y=-x^2,\ y=x-2$

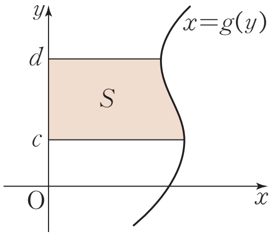
(2) $y=x^2-1,\ y=-x^2+2x+3$

(3) $y=e^x,\ y=e^{-x},\ y=2$

03 곡선과 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이

알 아 보 기 / 곡선과 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여 보자.

함수 $x=g(y)$가 y축의 구간 $[c,\ d]$에서 연속일 때, 곡선 $x=g(y)$와 y축 및 두 직선 $y=c$, $y=d$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 다음과 같다.



$$S=\int_c^d |x|\,dy=\int_c^d |g(y)|\,dy$$

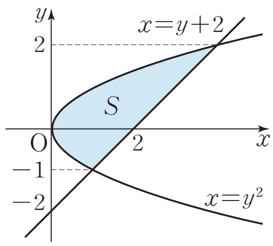
함 께 하 기 /

익힘책 39쪽 | 익힘책 40쪽 | 익힘책 42쪽

1 곡선 $x=y^2$과 직선 $x=y+2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

풀이

주어진 곡선과 직선의 교점의 y좌표는 $y^2=y+2$에서 $y=-1,\ 2$이다.
이때, y축의 구간 $[-1,\ 2]$에서 $y+2\ge y^2$이므로 구하는 넓이 S는



$$S=\int_{-1}^{2}\{(y+2)-y^2\}dy$$

$$=\left[\frac{1}{2}y^2+2y-\frac{1}{3}y^3\right]_{-1}^{2}=\frac{9}{2}$$

스 스 로 하 기 /

익힘책 39쪽 | 익힘책 40쪽 | 익힘책 42쪽

1 곡선 $y=\ln x$와 y축 및 두 직선 $y=1$, $y=-1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

2 다음의 넓이를 구하여라.

(1) 곡선 $y=\sqrt{2x}$와 y축 및 직선 $y=2$로 둘러싸인 도형

(2) 곡선 $x=\dfrac{y}{y^2+1}$와 y축 및 직선 $y=2$로 둘러싸인 도형

공학 도구

*수학적 개념을 공학 도구를 이용하여 이해하고 탐구해 보세요.

컴퓨터로 도형의 넓이 구하기

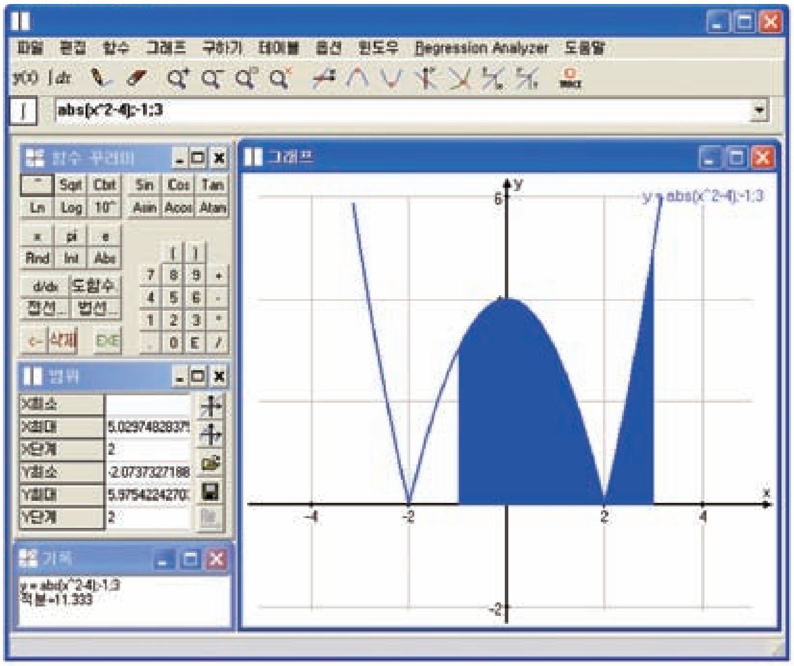
컴퓨터 프로그램을 이용하여 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

프로그램을 이용하여 곡선 $y=x^2-4$와 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이 $\int_{-1}^{3}|x^2-4|\,dx$를 구하여 보자.

1단계 프로그램을 실행시키고, 정적분 아이콘 $\int dx$ 를 클릭한다.

2단계 입력창에 abs(x^2−4);−1;3을 입력한다.

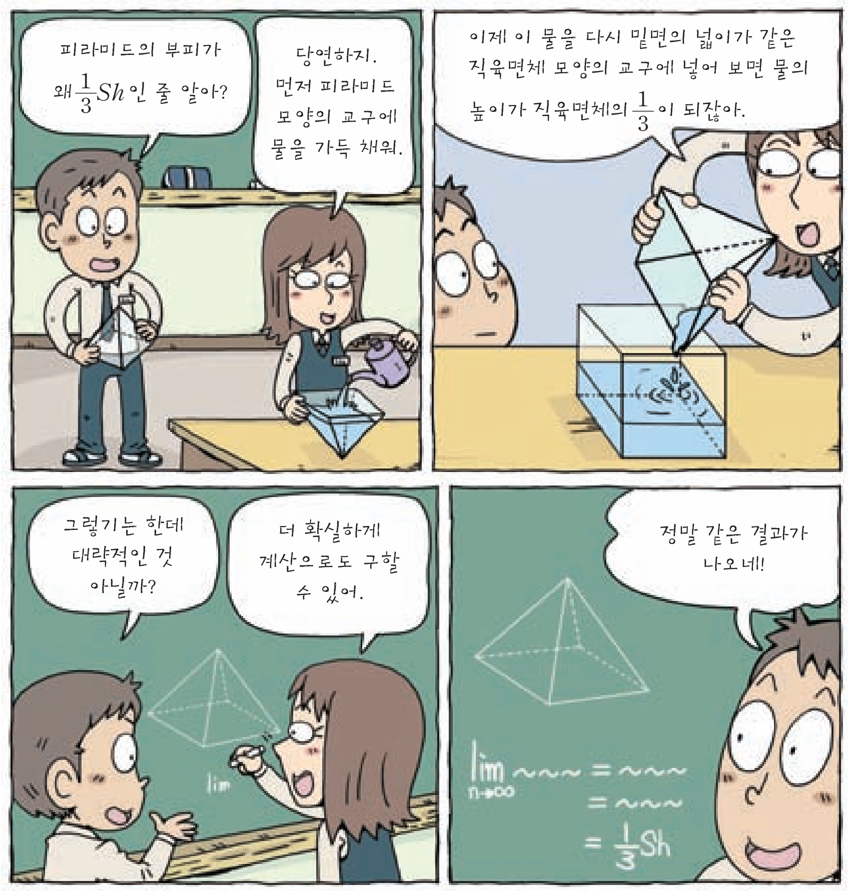
3단계 Enter 키를 누르면 ‘기록’ 창에 구하는 도형의 넓이인 11.333이 나타난다.



2 도형의 부피

학습 목표
- 입체도형의 부피를 구할 수 있다.
- 회전체의 부피를 구할 수 있다.

다 가 서 기 / **피라미드의 부피**



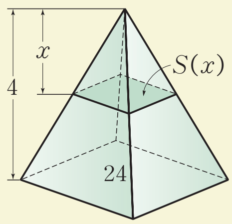
원뿔의 부피는 원뿔의 반지름의 길이와 높이가 각각 같은 원기둥의 부피의 $\frac{1}{3}$이다. 이것은 그리스 시대의 에우독소스(Eudoxos ; ? B. C. 400∼? B. C. 350)가 증명하였다.

이 단원에서 배우는 정적분을 이용하면 원뿔과 같은 입체도형의 부피를 편리하게 구할 수 있다.

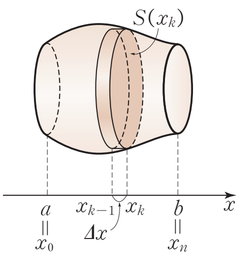
01 입체도형의 부피

탐 구 하 기 / 단면의 넓이

오른쪽 그림과 같이 밑넓이가 24이고 높이가 4인 사각뿔이 있다. 이 사각뿔을 밑면에 평행하고 꼭짓점으로부터 거리가 x인 평면으로 잘랐을 때 생기는 단면의 넓이 $S(x)$를 x의 식으로 나타내어 보자.

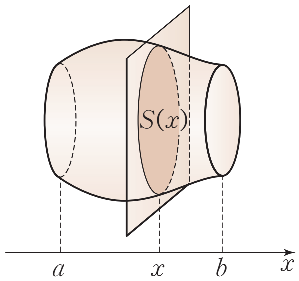


알 아 보 기 / 입체도형의 부피를 구하여 보자.



$V_n=\sum_{k=1}^{n} S(x_k)\varDelta x$

오른쪽 그림과 같이 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x)$로 주어진 입체도형의 부피 V를 구하여 보자.



x축 위의 구간 $[a,\ b]$를 n등분하여 양 끝점과 각 분점의 x좌표를 차례로

$$x_0(=a),\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n(=b)$$

라고 하자.

이때, 각 분점 $x_k\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$에서 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이 $S(x_k)$를 밑면의 넓이로 하고 높이가 $\varDelta x$인 원기둥의 부피는

$$S(x_k)\varDelta x$$

이다. 이들 원기둥의 부피의 합을 V_n이라고 하면

$$V=\lim_{n\to\infty} V_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} S(x_k)\varDelta x=\int_a^b S(x)dx$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

입체도형의 부피

구간 $[a,\ b]$의 임의의 점 x에서 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이가 $S(x)$일 때, 입체도형의 부피 V는

$$V=\int_a^b S(x)dx$$

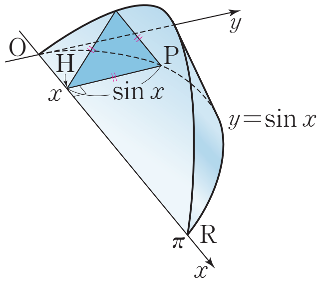
함께하기 /

익힘책 44쪽 | 익힘책 45쪽 | 익힘책 48쪽

1 곡선 $y=\sin x$ 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ \sin x)$에서 x축 위에 내린 수선의 발을 H라 하고, 선분 PH를 한 변으로 하는 정삼각형을 x축에 수직인 평면 위에 그린다. 점 P가 곡선 $y=\sin x$ 위를 원점에서 점 $\mathrm{R}(\pi,\ 0)$까지 움직일 때, 이 정삼각형이 만드는 입체도형의 부피를 구하여라.

풀이

오른쪽 그림에서 $\overline{\mathrm{PH}}=\sin x$이므로 $\overline{\mathrm{PH}}$를 한 변으로 하는 정삼각형의 넓이 $S(x)$는



$$S(x)=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{PH}}^2\sin 60^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin^2 x$$

따라서 구하는 입체의 부피 V는

$$V=\int_0^\pi \frac{\sqrt{3}}{4}\sin^2 x\,dx=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{8}\int_0^\pi (1-\cos 2x)dx=\frac{\sqrt{3}}{8}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^\pi$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{8}\pi$$

두 변의 길이가 a, b이고 그 끼인 각의 크기가 θ인 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2}ab\sin\theta$$

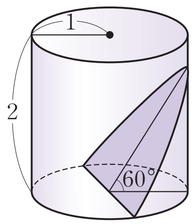
$\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$를 이용한다.

스스로 하기 /

익힘책 44쪽 | 익힘책 45쪽 | 익힘책 48쪽

1 오른쪽 그림과 같은 유리잔에 물을 채우면 물의 깊이가 x cm일 때 수면의 넓이는 $3\sqrt{x}$ cm^{2}라고 한다. 깊이가 4 cm일 때 물의 부피를 구하여라.

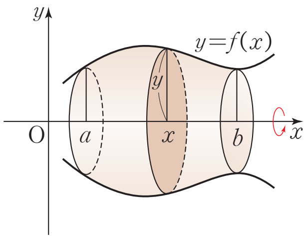
2 밑면의 반지름의 길이가 1이고, 높이가 2인 원기둥이 있다. 이 밑면의 지름을 포함하고 밑면과 60°를 이루는 평면으로 원기둥을 자를 때 생기는 입체도형 중에서 작은 쪽의 부피를 구하여라.



02 회전체의 부피

알 아 보 기 / 회전체의 부피를 구하여 보자.

x축의 구간 $[a,\ b]$에서 연속인 곡선 $y=f(x)$를 x축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 단면은 반지름의 길이가 $|f(x)|$인 원이다.



따라서 단면의 넓이 $S(x)$는

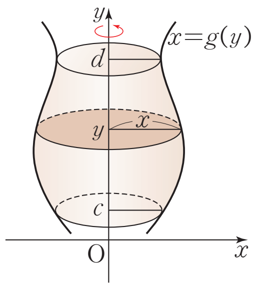
$$S(x)=\pi y^2=\pi\{f(x)\}^2$$

이므로 구하는 회전체의 부피 V는 다음과 같다.

$$V=\int_a^b S(x)dx=\pi\int_a^b \{f(x)\}^2 dx$$

단면의 넓이가 $\pi\{f(x)\}^2$인 입체도형의 부피를 구한다.

한편 y축의 구간 $[c,\ d]$에서 연속인 곡선 $x=g(y)$를 y축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 단면의 넓이 $S(y)$는



$$S(y)=\pi x^2=\pi\{g(y)\}^2$$

이므로 구하는 회전체의 부피 V는 다음과 같다.

$$V=\int_c^d S(y)dy=\pi\int_c^d \{g(y)\}^2 dy$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

회전체의 부피

(1) 함수 $y=f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형을 x축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피 V는

$$V=\pi\int_a^b y^2 dx=\pi\int_a^b \{f(x)\}^2 dx$$

(2) 함수 $x=g(y)$가 구간 $[c,\ d]$에서 연속일 때, 곡선 $x=g(y)$와 y축 및 두 직선 $y=c$, $y=d$로 둘러싸인 도형을 y축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피 V는

$$V=\pi\int_c^d x^2 dy=\pi\int_c^d \{g(y)\}^2 dy$$

함 께 하 기 /

익힘책 44쪽 | 익힘책 45쪽 | 익힘책 48쪽

1 곡선 $y=x^2$과 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=2$로 둘러싸인 도형을 x축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피를 구하여라.

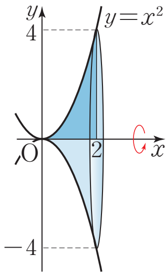
풀이

오른쪽 그림에서 구하는 부피 V는

$$V=\pi\int_0^2 y^2\,dx$$

$$=\pi\int_0^2 x^4\,dx=\pi\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^2$$

$$=\frac{32}{5}\pi$$



2 곡선 $y=\ln x$와 x축, y축 및 직선 $y=1$로 둘러싸인 도형을 y축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피 V를 구하여라.

풀이

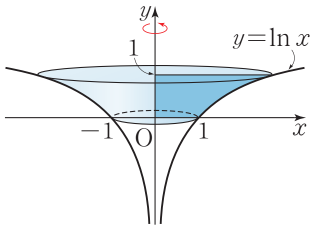
$y=\ln x$에서 $x=e^y$

따라서 구하는 부피 V는

$$V=\pi\int_0^1 (e^y)^2\,dy$$

$$=\pi\int_0^1 e^{2y}\,dy=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2y}\right]_0^1$$

$$=\frac{\pi}{2}(e^2-1)$$



스 스 로 하 기 /

익힘책 44쪽 | 익힘책 45쪽 | 익힘책 48쪽

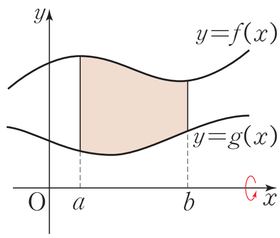
1 $y=\sin x$와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=\pi$로 둘러싸인 도형을 x축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피를 구하여라.

2 다음 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형을 y축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피를 구하여라.

(1) $y=4-x^2$, x축 (2) $y=e^x$, y축, $y=e$

알아보기 / 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 회전체의 부피를 알아보자.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(x) \geq g(x) \geq 0$일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형을 x축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피 V는 다음과 같다.



$$V=\pi\int_a^b \{f(x)\}^2dx-\pi\int_a^b \{g(x)\}^2dx$$

함께하기 / 익힘책 44쪽 | 익힘책 45쪽 | 익힘책 48쪽

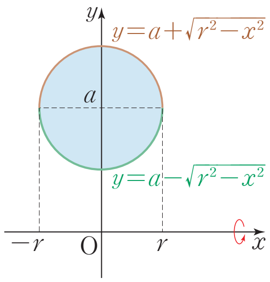
3 원 $x^2+(y-a)^2=r^2$을 x축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피 V를 구하여라. (단, $a>r>0$)

풀이

$x^2+(y-a)^2=r^2$에서

$y=a\pm\sqrt{r^2-x^2}$

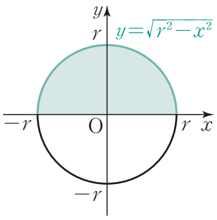
구하는 부피 V는 반원 $y=a+\sqrt{r^2-x^2}$을 x축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피에서 반원 $y=a-\sqrt{r^2-x^2}$을 x축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피를 뺀 것과 같으므로



$$V=\pi\int_{-r}^{r}(a+\sqrt{r^2-x^2})^2\,dx-\pi\int_{-r}^{r}(a-\sqrt{r^2-x^2})^2\,dx$$

$$=4a\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

$$=\mathbf{2\pi^2r^2a}$$

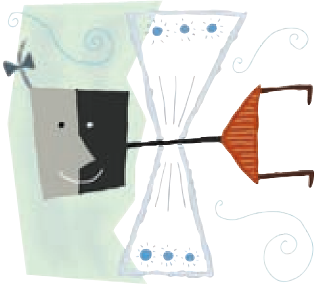


$\sqrt{r^2-x^2}$은 중심이 원점이고 반지름의 길이가 r인 원의 x축 윗부분이므로 $\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx=\frac{\pi r^2}{2}$ 이다.

스스로 하기 / 익힘책 44쪽 | 익힘책 45쪽 | 익힘책 48쪽

3 두 곡선 $y=\sin x$, $y=\cos x$와 두 직선 $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$로 둘러싸인 도형을 x축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피를 구하여라.

3 속도와 거리



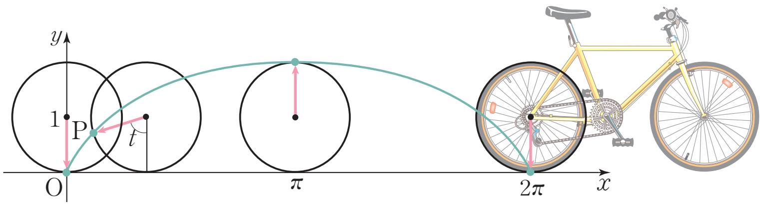
학습 목표

- 수직선 위를 움직이는 물체의 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.
- 평면 위를 움직이는 물체의 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.
- 곡선의 길이를 구할 수 있다.

다 가 서 기 / 사이클로이드

우리나라 전통 기와를 살펴보면 일정한 두께로 납작하게 곡면을 이루며 휘어져 있다. 기와의 기능은 지붕을 장식하고 비바람을 막으며, 빗물이 새는 것을 방지하여 건물의 부식을 막는 것이다. 따라서 기와의 모양을 빗물이 빨리 흘러내려 기와에 스며들지 않도록 만들어야 하는데, 빗물을 가장 빨리 흘러내리도록 하는 곡선의 모양은 사이클로이드(Cycloid)곡선으로 알려져 있다.

사이클로이드는 바퀴라는 의미의 그리스 어에서 나온 말로 회전하는 바퀴 위의 한 점의 자취를 나타낸다. 즉, 다음 그림과 같이 원 $x^2+(y-1)^2=1$을 x축 위를 미끄러지지 않도록 하여 1회전시킬 때, 이 원 위의 점 P가 그리는 도형을 사이클로이드라고 한다.



위의 그림에서 원이 회전한 각을 t라고 하면 원 위의 점 P의 x좌표와 y좌표는 각각 다음과 같다.

$$x=t-\sin t,\ y=1-\cos t$$

사이클로이드 곡선은 그 길이를 구하기 쉬울 뿐 아니라 역학적으로 매우 중요한 곡선이다.

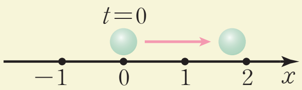
01 수직선 위에서의 속도와 거리

탐 구 하 기 / 물체의 위치와 속도

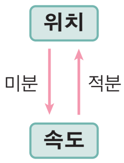
원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 물체의 t초 후의 위치 x가 $x=f(t)$이고, 이때의 속도 v가

$$v=3t^2-2t$$

일 때, 함수 $f(t)$를 구하여 보자.



알 아 보 기 / 수직선 위에서의 운동에 대하여 알아보자.



수직선 위를 움직이는 물체의 시각 t에서의 속도 $v(t)$와 시각 $t=a$에서의 위치 x_0을 알 때, 이 물체의 시각 t에서의 위치 $x(t)$와 위치의 변화량을 구하여 보자.

$v(t)=x'(t)$이므로 $\quad x(t)=\int v(t)dt$

즉, $x(t)$는 $v(t)$의 부정적분이므로 $x(a)=x_0$에서

$$\int_a^t v(t)dt=x(t)-x(a)=x(t)-x_0$$

따라서 시각 t에서의 물체의 위치 $x(t)$는 다음과 같다.

$$x(t)=x_0+\int_a^t v(t)dt$$

이때, 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 물체의 위치의 변화량은 $\int_a^b v(t)dt$이다.

한편 시각 $t=a$에서 $t=b$까지

(i) $v(t)>0$일 때, $x(t)$는 증가하므로

$$x(b)-x(a)=\int_a^b v(t)dt$$

(ii) $v(t)<0$일 때, $x(t)$는 감소하므로

$$x(a)-x(b)=\int_b^a v(t)dt=\int_a^b \{-v(t)\}dt$$

즉, $t=a$에서 $t=b$까지 물체가 움직인 거리는

$$\int_a^b |v(t)|dt$$

이다.

$|v(t)|$는 물체의 속력이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

물체의 위치의 변화량과 수직선 위에서의 물체가 움직인 거리

수직선 위를 움직이는 물체의 속도가 $v(t)$이고 시각 $t=a$에서의 위치가 x_0이면

(1) 시각 t에서의 물체의 위치: $x(t)=x_0+\int_a^t v(t)dt$

(2) 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 물체의 위치의 변화량: $\int_a^b v(t)dt$

(3) 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 물체가 움직인 거리: $\int_a^b |v(t)|dt$

함 께 하 기 /

익힘책 50쪽 | 익힘책 51쪽 | 익힘책 52쪽

1 수직선 위를 움직이는 어떤 물체의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=t^2-3t+2$$

일 때, 다음을 구하여라. (단, $t=0$일 때의 물체의 위치는 1이다.)

(1) 시각 $t=2$에서 물체의 위치

(2) 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 물체의 위치의 변화량

(3) 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 물체가 움직인 거리

풀이

(1) 시각 $t=0$일 때의 위치가 1이므로 시각 $t=2$에서 물체의 위치는

$$x(t)=1+\int_0^2(t^2-3t+2)dt$$

$$=1+\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+2t\right]_0^2=\mathbf{\frac{5}{3}}$$

(2) 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 물체의 위치의 변화량은

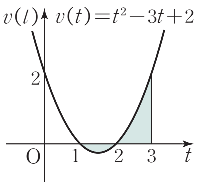
$$\int_1^3(t^2-3t+2)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+2t\right]_1^3=\mathbf{\frac{2}{3}}$$

(3) 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 물체가 움직인 거리는

$$\int_1^3|t^2-3t+2|dt=\int_1^2(-t^2+3t-2)dt+\int_2^3(t^2-3t+2)dt$$

$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2-2t\right]_1^2+\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+2t\right]_2^3$$

$$=\mathbf{1}$$



구간 $[1,\ 2]$에서 $v(t)\le 0$
구간 $[2,\ 3]$에서 $v(t)\ge 0$

2 수직선 위를 움직이는 물체가 있다. 이 물체가 원점을 출발한 후 시각 t에서의 속도 $v(t)$는

$$v(t)=\cos t+\cos 2t$$

일 때, 다음을 구하여라.

(1) 시각 t에서의 물체의 위치 $x(t)$

(2) 시각 $t=0$에서 $t=\pi$까지 물체가 움직인 거리 s

풀이

(1) $x(t)=\int_0^t(\cos t+\cos 2t)dt=\left[\sin t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^t=\mathbf{\sin t+\frac{\sin 2t}{2}}$

(2) $\cos t+\cos 2t=0$을 풀면 $\quad \cos t+2\cos^2 t-1=0$

$$(\cos t+1)(2\cos t-1)=0 \qquad \therefore t=\pi \text{ 또는 } t=\frac{\pi}{3}$$

구간 $\left[0,\ \frac{\pi}{3}\right]$에서 $v(t)\geq 0$, 구간 $\left[\frac{\pi}{3},\ \pi\right]$에서 $v(t)\leq 0$이므로 구하는 거리 s는

$$\begin{aligned} s&=\int_0^\pi|\cos t+\cos 2t|\,dt \\ &=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\cos t+\cos 2t)dt-\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(\cos t+\cos 2t)dt \\ &=\left[\sin t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}-\left[\sin t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}=\mathbf{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \end{aligned}$$

스스로 하기 /

익힘책 50쪽 | 익힘책 51쪽 | 익힘책 52쪽

1 어떤 로켓을 지면에서 발사한 후 t초일 때의 로켓의 수직 방향으로의 속도를 $v(t)$ m/s라고 하면

$$v(t)=-3t^2+192t+120$$

이다. 이때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 발사한 후 t초일 때의 로켓의 높이 $h(t)$를 구하여라.

(2) 이 로켓을 발사한 후 30초일 때의 로켓의 높이를 구하여라.

2 수직선 위를 움직이는 어떤 물체의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=\sin t-\sin 2t$$

일 때, 다음을 구하여라. (단, $t=0$일 때의 위치는 1이다.)

(1) 시각 t에서의 물체의 위치

(2) 시각 $t=0$에서 $t=\pi$까지 물체가 움직인 거리

02 평면 위에서의 속도와 거리

알 아 보 기 / 평면 위에서의 운동에 대하여 알아보자.

평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 좌표 $(x,\ y)$가

$$x=f(t),\ y=g(t)$$

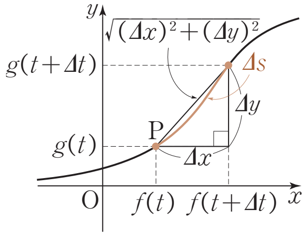
로 주어질 때, t에서의 속도 v의 순서쌍 $(v_x,\ v_y)$는 다음과 같다.

$$(v_x,\ v_y)=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)$$

점 P가 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 움직인 거리 s를 구하여 보자.

t의 증분 Δt에 대응하는 x, y의 증분 Δx, Δy는 각각 다음과 같다.

$$\Delta x=f(t+\Delta t)-f(t)$$
$$\Delta y=g(t+\Delta t)-g(t)$$



한편 점 P가 시각 a에서 t까지 움직인 거리를 $s(t)$라고 하면 $s(t)$의 증분 Δs는 Δt가 충분히 작을 때

$$\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

에 매우 가까운 값이 되므로

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}\fallingdotseq\frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\Delta t}=\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}$$

과 같이 쓸 수 있다.

여기서 Δt의 값이 한없이 0에 가까워지면

$$\begin{aligned}s'(t)&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}\\&=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\end{aligned}$$

$s(t)$는 $s'(t)$의 한 부정적분이므로 점 P가 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 움직인 거리 s는

$$\begin{aligned}s&=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt\\&=\int_a^b\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt\end{aligned}$$

와 같이 나타내어진다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

평면 위에서의 물체가 움직인 거리

평면 위를 움직이는 물체의 시각 t에서의 좌표 $(x,\ y)$가 $x=f(t)$, $y=g(t)$라고 하면 물체가 $t=a$에서 $t=b$까지 움직인 거리 s는

$$s=\int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$$

함 께 하 기 /

익힘책 50쪽 | 익힘책 51쪽 | 익힘책 52쪽

1 평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 좌표 $(x,\ y)$가

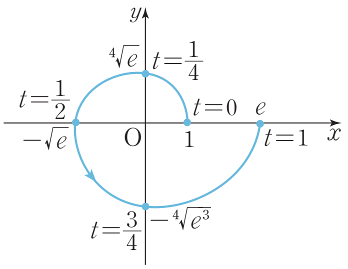
$$x=e^t\cos 2\pi t,\ y=e^t\sin 2\pi t$$

일 때, 점 P가 시각 $t=0$에서 $t=1$까지 움직인 거리 s를 구하여라.

풀이

$$\frac{dx}{dt}=e^t(\cos 2\pi t-2\pi\sin 2\pi t)$$

$$\frac{dy}{dt}=e^t(\sin 2\pi t+2\pi\cos 2\pi t)$$



이므로 점 P가 움직인 거리 s는

$$s=\int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$=\int_0^1 e^t\sqrt{1+4\pi^2}\,dt=\boldsymbol{\sqrt{1+4\pi^2}\,(e-1)}$$

스 스 로 하 기 /

익힘책 50쪽 | 익힘책 51쪽 | 익힘책 52쪽

1 평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 좌표 $(x,\ y)$가

$$x=t^2,\ y=\frac{t^3}{3}-t$$

일 때, 점 P가 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 움직인 거리를 구하여라.

2 평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 좌표 $(x,\ y)$가

$$x=(1-t^2)\cos t,\ y=(1-t^2)\sin t$$

일 때, 점 P가 시각 $t=0$에서 $t=1$까지 움직인 거리를 구하여라.

03 곡선의 길이

알 아 보 기 / 정적분을 이용하여 곡선의 길이를 구하여 보자.

곡선이 매개변수 t를 사용하여 $x=f(t)$, $y=g(t)$ $(a\le t\le b)$로 나타내어질 때, 이 곡선의 길이 l을 구하여 보자.

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 좌표 $(x,\ y)$가

$$x=f(t),\ y=g(t)\ (a\le t\le b)$$

로 주어질 때, 이 식은 t의 값이 변함에 따라 점 P가 그리는 곡선의 방정식이다. 따라서 점 P가 움직인 경로가 겹치지 않으면 점 P가 그리는 곡선의 길이는 점 P가 움직인 거리와 같다.

즉, 곡선의 겹치는 부분이 없을 때, $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 그리는 곡선의 길이 l은 다음과 같다.

$$l=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

한편 곡선 $y=f(x)$는 점 P의 좌표 $(x,\ y)$가

$$x=t,\ y=f(t)$$

로 주어지는 곡선으로 생각할 수 있다.

그러므로 $x=a$에서 $x=b$까지 곡선 $y=f(x)$의 길이 l은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}l&=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}\,dt\\&=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx\end{aligned}$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

곡선의 길이

(1) 매개변수로 나타낸 곡선 $x=f(t)$, $y=g(t)$의 겹치는 부분이 없을 때, 곡선의 $t=a$에서 $t=b$까지의 길이 l은

$$l=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

(2) 곡선 $y=f(x)$의 $x=a$에서 $x=b$까지의 길이 l은

$$l=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

익힘책 50쪽 | 익힘책 51쪽 | 익힘책 52쪽

1 다음을 구하여라.

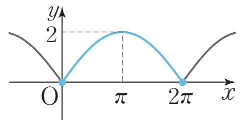
(1) 곡선 $x=\theta-\sin\theta,\ y=1-\cos\theta$의 $\theta=0$에서 $\theta=2\pi$까지의 길이

(2) 곡선 $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$의 $x=0$에서 $x=1$까지의 길이

풀이

(1) $x=\theta-\sin\theta,\ y=1-\cos\theta$에서

$$\frac{dx}{d\theta}=1-\cos\theta,\ \frac{dy}{d\theta}=\sin\theta$$



따라서 구하는 곡선의 길이 l은

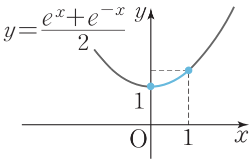
$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos\theta)}\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta=2\int_0^{2\pi}\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$=2\left[-2\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi}=8$$

(2) $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$에서

$$f'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$



따라서 구하는 곡선의 길이 l은

$$l=\int_0^1\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_0^1\frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx=\frac{1}{2}\left[e^x-e^{-x}\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)$$

익힘책 50쪽 | 익힘책 51쪽 | 익힘책 52쪽

1 곡선 $x=\ln t,\ y=\dfrac{1}{2}\left(t+\dfrac{1}{t}\right)$의 $t=\dfrac{1}{e}$에서 $t=e$까지의 길이를 구하여라.

2 곡선 $f(x)=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$의 $x=0$에서 $x=2$까지의 길이를 구하여라.

곡선과 축 사이의 넓이

계산

1 다음 곡선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

(1) $y=x^2-1$, x축　　　(2) $y=x^3-6x$, x축, $x=1$, $x=3$

(3) $y=e^{2x}$, x축, $x=0$, $x=2$　　　(4) $y=\ln x$, x축, y축, $y=1$

회전체의 부피

계산

2 다음 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형을 [　] 안에 주어진 축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피를 구하여라.

(1) $y=\sin x+\cos x$, x축, y축, $x=\pi$ [x축]

(2) $y=\ln x$, x축, y축, $y=1$ [y축]

속도와 거리

이해

3 다음 물음에 답하여라.

(1) 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v=\cos \pi t$일 때, 시각 $t=1$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리를 구하여라.

(2) 평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 좌표 (x, y)가

$$x=e^t\cos t,\ y=-e^t\sin t$$

일 때, 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리를 구하여라.

두 곡선 사이의 넓이

이해

4 다음을 구하여라.

(1) 두 곡선 $y=x^3$, $y=x^2-4x+4$ 및 두 직선 $x=0$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이

(2) 두 곡선 $y=\sin x$, $y=\sin 2x$ 및 두 직선 $x=0$, $x=\pi$로 둘러싸인 도형의 넓이

기름 탱크

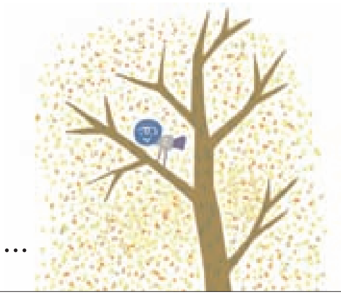
의사소통

5 어떤 기름 탱크에 기름을 채우는 데 기름의 깊이가 x cm일 때의 그 표면의 넓이는 $\ln(x+1)$ cm^2라고 한다. 기름의 깊이가 20 cm일 때 기름의 부피를 구하여라.

Ⅱ 순열과 조합

봉화는 통신 수단으로 오랫동안 사용되었다. 여러 개의 굴뚝으로 이루어진 봉수대에서 만들 수 있는 다양한 신호를 사용하여 나라의 곳곳에서 일어나는 위급한 상황을 전달할 수 있었다.

수원 화성의 봉수대



단원을 시작하기 전에 …

곱의 법칙

1 다음 수의 양의 약수의 개수를 구하여라.

(1) 36 (2) 72 (3) 96 (4) 360

경우의 수

2 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 다음을 구하여라.

(1) 나오는 눈의 수의 곱이 홀수인 경우의 수

(2) 나오는 눈의 수의 합이 짝수인 경우의 수

다항식의 전개

3 다음 식을 전개하여라.

(1) $(a+b)^2$ (2) $(a+b)^3$

순열과 조합

4 다음 값을 구하여라.

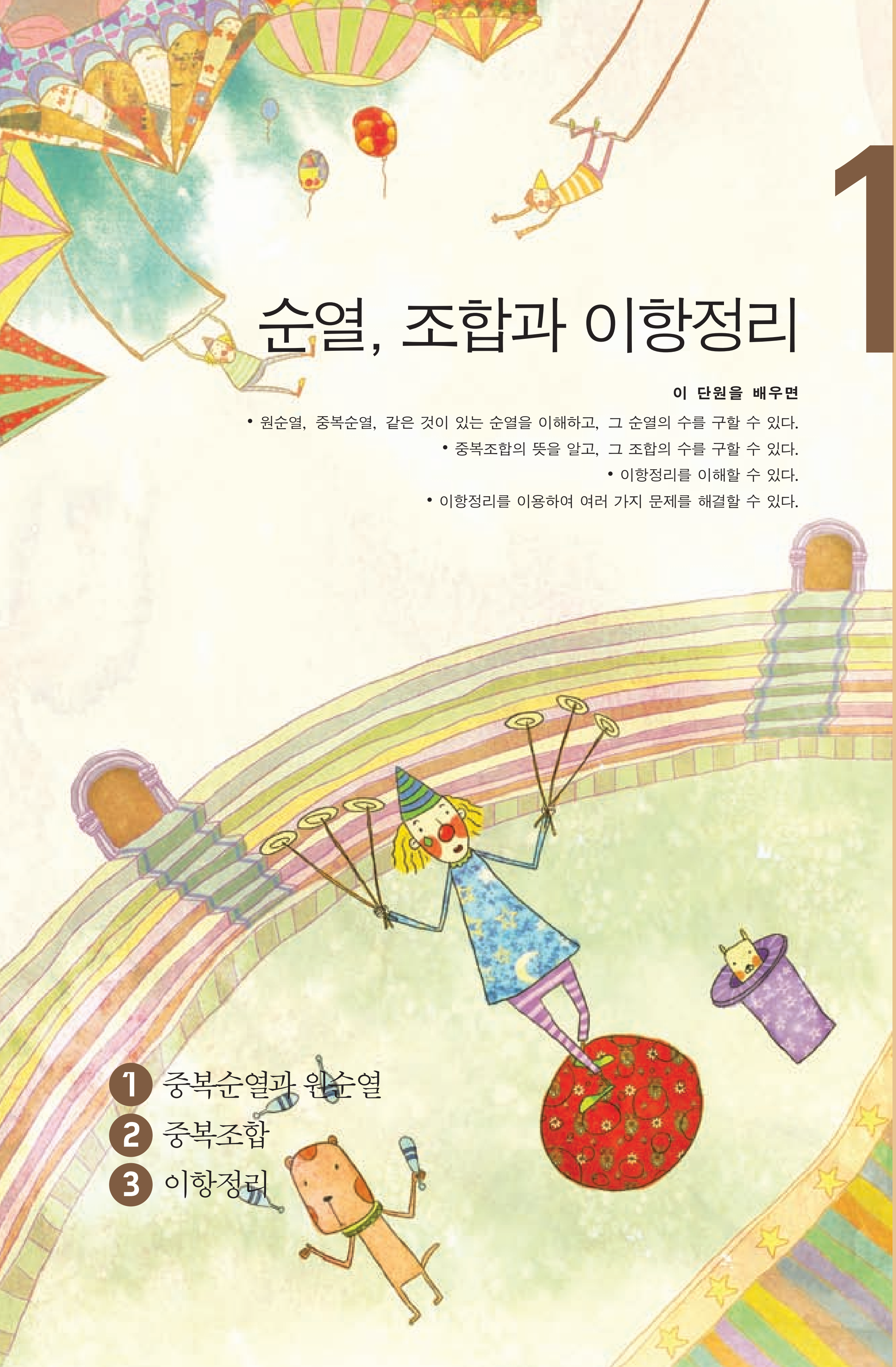
(1) ${}_8P_2$ (2) ${}_8C_2$

순열과 조합의 활용

5 다음 물음에 답하여라.

(1) 7종류의 상품을 한 줄에 한 종류씩 7줄로 진열하려고 한다. 하루에 한 번씩 상품이 진열된 줄의 위치를 바꿀 때, 모든 진열의 경우를 보여 주려면 최소 며칠이 걸리는가?

(2) 정육각형의 꼭짓점 중 세 점을 연결하여 만들 수 있는 삼각형의 개수를 구하여라.



1

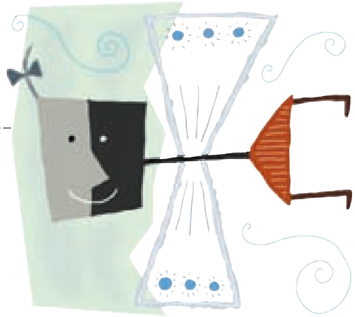
순열, 조합과 이항정리

이 단원을 배우면

- 원순열, 중복순열, 같은 것이 있는 순열을 이해하고, 그 순열의 수를 구할 수 있다.
- 중복조합의 뜻을 알고, 그 조합의 수를 구할 수 있다.
- 이항정리를 이해할 수 있다.
- 이항정리를 이용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.

1 중복순열과 원순열
2 중복조합
3 이항정리

1 중복순열과 원순열



학습 목표

- 중복순열의 뜻을 알고, 그 순열의 수를 구할 수 있다.
- 원순열의 뜻을 알고, 그 순열의 수를 구할 수 있다.
- 같은 것이 있는 순열을 이해하고, 그 순열의 수를 구할 수 있다.

다 가 서 기 / 공 위에 일렬로 서 있기

사물을 일렬로 배열하는 경우의 수와 둥글게 배열하는 경우의 수는 다르다. 일렬로 배열할 때에는 앞, 뒤의 구분이 있지만 둥글게 배열할 때에는 앞, 뒤의 구분이 없기 때문이다.

01 중복순열

탐 구 하 기 / 같은 숫자가 들어 있는 세 자리의 자연수 찾기

세 자리의 자연수에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 숫자가 모두 같은 것의 개수를 구하여라.
2. 119, 717 등과 같이 두 개의 숫자가 같은 것의 개수를 구하여라.

알 아 보 기 / 중복순열의 뜻을 알아보고, 그 순열의 수를 구하여 보자.

중복을 허용하여 네 개의 숫자 1, 2, 3, 4로 세 자리의 자연수를 만들 때, 각 자리에 올 수 있는 숫자는

백의 자리: 1, 2, 3, 4
십의 자리: 1, 2, 3, 4
일의 자리: 1, 2, 3, 4

백	십	일
↑	↑	↑
4가지	4가지	4가지

이다. 따라서 곱의 법칙에 의하여 만들 수 있는 경우의 수는 다음과 같다.

$$4\times4\times4=4^3=64(\text{가지})$$

1	2	⋯	r
↑	↑	⋯	↑
n가지	n가지	⋯	n가지

일반적으로 서로 다른 n개에서 중복을 허용하여 r개를 택하는 순열을 **중복순열**이라 하고, 그 수를 기호로

$$_{n}\Pi_{r}$$

와 같이 나타낸다. 이때, 중복순열의 수는 다음과 같다.

Π는 곱을 나타내는 Product의 첫 글자 P에 해당하는 그리스 문자이다.

$_{n}\Pi_{r}$에서는 $n<r$인 경우도 있다.

중복순열의 수

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복순열의 수는

$$_{n}\Pi_{r}=n^{r}$$

스 스 로 하 기 /

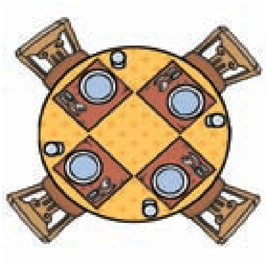
익힘책 61쪽 | 익힘책 62쪽 | 익힘책 63쪽

1 중복을 허용하여 다섯 개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수를 구하여라.

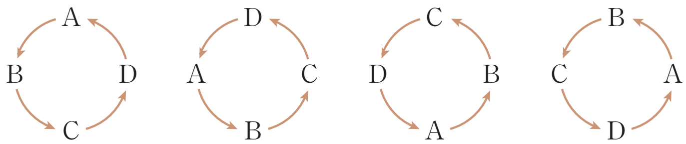
02 원순열

알 아 보 기 / 원순열의 뜻을 알아보고, 그 순열의 수를 구하여 보자.

등근 식탁에 4명의 가족이 둘러앉아 식사를 하려고 한다. 식탁에 둘러앉는 경우의 수를 알아보자.



가족 4명을 각각 A, B, C, D로 나타내면 다음의 4가지 경우는 위치 관계가 서로 같으므로 같은 순열이다.



ABCD　　DABC　　CDAB　　BCDA

n명을 원형으로 배열할 때에는 n가지씩 같은 것이 생긴다.

즉, 네 사람을 한 줄로 배열하는 순열의 수는 ${}_4P_4$이지만 이것을 원형으로 배열할 때에는 위와 같이 4가지씩 같은 것이 생긴다. 따라서 4명의 가족이 둥근 식탁에 둘러앉는 경우의 수는 다음과 같다.

$$\frac{{}_4P_4}{4}=\frac{4!}{4}=(4-1)!=3!=6(\text{가지})$$

일반적으로 서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 순열을 **원순열**이라고 한다. 이때, 원순열의 수는 다음과 같다.

원순열의 수

서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는

$$\frac{{}_nP_n}{n}=(n-1)!$$

스 스 로 하 기 / 익힘책 61쪽 | 익힘책 62쪽 | 익힘책 63쪽

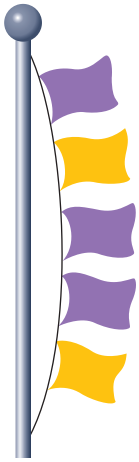
1 남자 3명, 여자 3명이 원탁에 둘러앉을 때, 다음을 구하여라.

(1) 남녀 6명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수

(2) 남자, 여자가 교대로 둘러앉는 경우의 수

03 같은 것이 있는 순열

알 아 보 기 / 같은 것이 있는 순열을 이해하고, 그 순열의 수를 구하여 보자.



오른쪽 그림과 같이 모양이 같은 보라색 깃발 3개, 노란색 깃발 2개를 게양하여 모두 몇 가지 신호를 만들 수 있는지 생각하여 보자.

보라색 깃발을 a, 노란색 깃발을 b로 나타내면

$$a, \ a, \ a, \ b, \ b$$

이고, 구하는 경우의 수는 이를 일렬로 배열하는 순열의 수를 구하는 것과 같다.

3개의 a를 a_1, a_2, a_3, 2개의 b를 b_1, b_2로 구분하여

$$a_1, \ a_2, \ a_3, \ b_1, \ b_2$$

로 나타내면 이를 일렬로 배열하는 순열의 수는 $5!$이다.

이때, 다음 그림과 같은 $3! \times 2!$가지의 순열은 번호의 구별이 없으면 모두 $aaabb$와 같은 순열이다.

$$\underbrace{3!\left\{\begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 \\ a_1 & a_3 & a_2 & b_1 & b_2 \\ a_2 & a_1 & a_3 & b_1 & b_2 \\ a_2 & a_3 & a_1 & b_1 & b_2 \\ a_3 & a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \\ a_3 & a_2 & a_1 & b_1 & b_2 \end{array}\right. \quad \begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & b_2 & b_1 \\ a_1 & a_3 & a_2 & b_2 & b_1 \\ a_2 & a_1 & a_3 & b_2 & b_1 \\ a_2 & a_3 & a_1 & b_2 & b_1 \\ a_3 & a_1 & a_2 & b_2 & b_1 \\ a_3 & a_2 & a_1 & b_2 & b_1 \end{array}}_{2!}$$

또 $aabab$ 등의 다른 경우에 대해서도 위와 마찬가지로 각각 $3! \times 2!$가지의 같은 순열이 생기므로 만들 수 있는 신호의 개수는

$$\frac{5!}{3!2!}=10(\text{개})$$

임을 알 수 있다.

일반적으로 같은 것이 있는 순열의 수는 다음과 같다.

같은 것이 있는 순열의 수

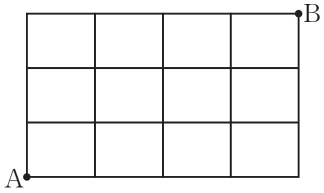
n개 중에서 서로 같은 것이 각각 p개, q개, r개, $\cdots$일 때, n개를 모두 일렬로 배열하는 순열의 수는

$$\frac{n!}{p!q!r!\cdots} \quad (\text{단, } p+q+r+\cdots=n)$$

함께 하기 /

익힘책 61쪽 | 익힘책 62쪽 | 익힘책 63쪽

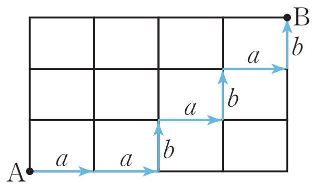
1 오른쪽 그림과 같은 도로가 있다. A 지점에서 B 지점까지 가려고 할 때, 최단 거리로 가는 경우의 수를 구하여라.



최단 거리로 가야하므로 오른쪽과 위쪽으로만 움직여야 한다.

풀이

오른쪽 그림과 같이 가로로 한 칸 가는 것을 a, 세로로 한 칸 가는 것을 b로 놓으면, A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 4개의 a, 3개의 b를 일렬로 배열하는 순열과 같다.



따라서 구하는 경우의 수는

$$\frac{7!}{4!3!}=35(\text{가지})$$

스스로 하기 /

익힘책 61쪽 | 익힘책 62쪽 | 익힘책 63쪽

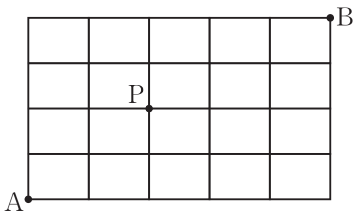
같은 문자가 몇 개씩 있는지를 조사한다.

1 다음 단어를 구성하고 있는 문자를 일렬로 배열할 때, 서로 다른 경우의 수를 구하여라.

(1) coffee　　(2) success　　(3) statistics

2 10명의 학생에게 세 가지 공연 A, B, C의 입장권을 나누어 주려고 한다. A 공연 입장권이 5장, B 공연 입장권이 2장, C 공연 입장권이 3장 있을 때, 입장권을 나누어 주는 경우의 수를 구하여라.

3 오른쪽 그림과 같은 도로가 있을 때, 다음을 구하여라.



(1) A 지점에서 출발하여 P 지점을 지나서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수

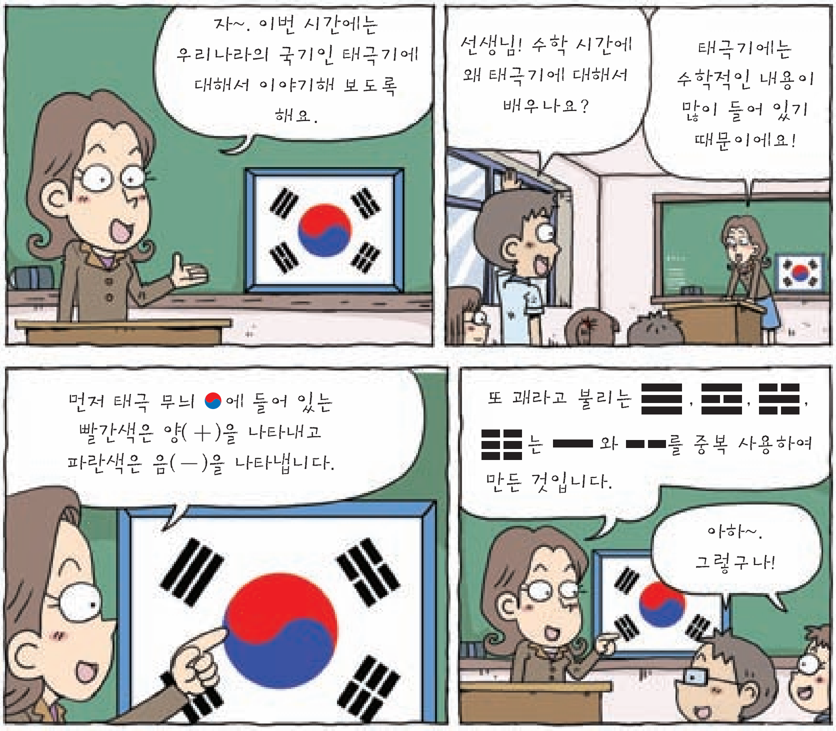
(2) A 지점에서 출발하여 P 지점을 지나지 않고 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수

2 중복조합

학습 목표

- 중복조합의 뜻을 안다.
- 중복조합의 수를 구할 수 있다.

다 가 서 기 / 태극기 속의 수학



태극기의 괘(卦)는 양을 나타내는 ⚊와 음을 나타내는 ⚋를 중복 사용하여 나타낸 것이다. ⚊와 ⚋ 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 방법은 다음과 같이 4가지가 있다.

{⚊, ⚊, ⚊}, {⚊, ⚊, ⚋},
{⚊, ⚋, ⚋}, {⚋, ⚋, ⚋}

그리고 이들을 순서를 생각하여 세로로 배열하면 8가지의 괘가 나오는데, 그중에서 태극기에 있는 괘는 다음의 4가지이다.

☰, ☲, ☵, ☷

01 중복조합의 뜻

탐 구 하 기 / 컵 고르기

희주는 친구의 생일에 선물할 컵 2개를 고르려고 한다. 선물 가게에는 노란색, 파란색, 빨간색 세 종류의 컵이 있다. 다음 물음에 답하여 보자.

1. 컵 2개를 같은 색으로 고르는 경우의 수를 구하여라.
2. 컵 2개를 서로 다른 색으로 고르는 경우의 수를 구하여라.

알 아 보 기 / 중복조합의 뜻을 알아보자.

$_{n}\mathrm{C}_{r}=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ (단, $0<r\le n$)

4장의 카드 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ 에서 서로 다른 카드 2장을 택하는 조합은 다음과 같다. 이때, 조합의 수는 $_{4}\mathrm{C}_{2}=6$이다.

$$\{\boxed{1},\ \boxed{2}\},\ \{\boxed{1},\ \boxed{3}\},\ \{\boxed{1},\ \boxed{4}\},$$
$$\{\boxed{2},\ \boxed{3}\},\ \{\boxed{2},\ \boxed{4}\},\ \{\boxed{3},\ \boxed{4}\},$$

한편 4장의 카드 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ 에서 중복을 허용하여 2장을 택하는 조합을 생각하면 다음과 같다.

$$\{\boxed{1},\ \boxed{1}\},\ \{\boxed{1},\ \boxed{2}\},\ \{\boxed{1},\ \boxed{3}\},\ \{\boxed{1},\ \boxed{4}\},$$
$$\{\cancel{\boxed{2},\ \boxed{1}}\},\ \{\boxed{2},\ \boxed{2}\},\ \{\boxed{2},\ \boxed{3}\},\ \{\boxed{2},\ \boxed{4}\},$$
$$\{\cancel{\boxed{3},\ \boxed{1}}\},\ \{\cancel{\boxed{3},\ \boxed{2}}\},\ \{\boxed{3},\ \boxed{3}\},\ \{\boxed{3},\ \boxed{4}\},$$
$$\{\cancel{\boxed{4},\ \boxed{1}}\},\ \{\cancel{\boxed{4},\ \boxed{2}}\},\ \{\cancel{\boxed{4},\ \boxed{3}}\},\ \{\boxed{4},\ \boxed{4}\}$$

이와 같이 서로 다른 n개에서 중복을 허용하여 r개를 택하는 조합을 **중복조합**이라 하고, 그 수를 기호로

$$_{n}\mathrm{H}_{r}$$

와 같이 나타낸다.

$_{n}\mathrm{H}_{r}$에서 H는 동차를 나타내는 Homogeneous의 첫 글자이다.

스 스 로 하 기 /

익힘책 66쪽 | 익힘책 67쪽 | 익힘책 68쪽

1 3장의 카드 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ 에서 2장을 택하는 중복조합을 만들어 보아라.

02 중복조합의 수

알 아 보 기 / 중복조합의 수를 구하여 보자.

1, 1	→	1, 2
1, 2	→	1, 3
1, 3	→	1, 4
1, 4	→	1, 5
2, 2	→	2, 3
2, 3	→	2, 4
2, 4	→	2, 5
3, 3	→	3, 4
3, 4	→	3, 5
4, 4	→	4, 5

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 조합의 수는 ${}_{n}C_{r}$이다.

이제 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합의 수 ${}_{n}H_{r}$를 구하여 보자.

이를테면 4개의 숫자 1, 2, 3, 4 중에서 2개의 숫자를 택하는 중복조합을 숫자의 크기 순서로 정리하면

1, 1 , 1, 2 , 1, 3 , 1, 4 , 2, 2 ,
2, 3 , 2, 4 , 3, 3 , 3, 4 , 4, 4 …… ㉠

여기서 이들 각 조합의 두 번째 숫자에 1을 더하면 ㉠의 조합은 각각 다음과 같다.

1, 2 , 1, 3 , 1, 4 , 1, 5 , 2, 3 ,
2, 4 , 2, 5 , 3, 4 , 3, 5 , 4, 5 …… ㉡

이때, ㉠의 조합 전체의 집합과 ㉡의 조합 전체의 집합은 일대일 대응이므로 그 원소의 개수는 같다. 그런데 ㉡은 서로 다른 5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5에서 2개의 숫자를 택하는 조합이므로 그 수는 ${}_{5}C_{2}$이다.

한편 $5=4+2-1$이므로 서로 다른 4개에서 2개를 택하는 중복조합의 수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$${}_{4}H_{2}={}_{4+2-1}C_{2}={}_{5}C_{2}=10$$

일반적으로 중복조합의 수는 다음과 같다.

중복조합의 수

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합의 수는

$${}_{n}H_{r}={}_{n+r-1}C_{r}$$

스 스 로 하 기 /

익힘책 66쪽 | 익힘책 67쪽 | 익힘책 68쪽

1 사과, 감, 배, 포도, 귤 5종류의 과일에서 중복을 허용하여 2개씩 포장하는 경우의 수를 구하여라.

2 다음 식을 전개할 때 생기는 항의 개수를 구하여라.

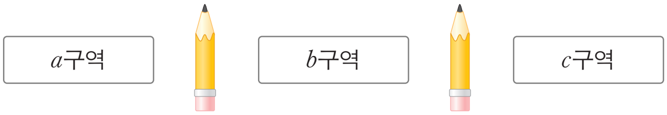
(1) $(a+b)^4$ (2) $(a+b+c)^3$

지우개와 연필의 배열로 알아보는 중복조합의 수

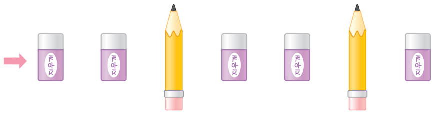
탐구 과제 세 개의 문자 a, b, c 중에서 중복을 허용하여 다섯 개를 뽑는 경우를 생각하여 보자.

예를 들어 a를 2개, b를 2개, c를 1개 뽑았다면 a, a, b, b, c이다.
또 a를 0개, b를 4개, c를 1개 뽑았다면 b, b, b, b, c이다.
그리고 a를 5개 뽑고 b와 c는 하나도 뽑지 않았다면 a, a, a, a, a이다.

여기에서 각 경우에 있는 a, b, c를 구별하기 위하여 다음과 같이 연필로 구역을 만들어 보자.



이제 각 구역에 a, b, c의 개수만큼 지우개를 늘어놓아 보자.

a, a, b, b, c인 경우 →


b, b, b, b, c인 경우 →


a, a, a, a, a인 경우 →


이러한 배열에서 다음을 알 수 있다.

(i) 연필의 개수는 문자의 종류 수보다 1만큼 작다.
(ii) 지우개의 개수는 중복을 허용하여 뽑는 문자의 개수와 같다.
(iii) 구하는 경우의 수는 연필 2개와 지우개 5개를 늘어놓을 때 지우개가 위치하는 곳을 찾는 조합의 수 ${}_{3+5-1}C_5={}_7C_5$이다.

일반적으로 서로 다른 n개에서 중복을 허용하여 r개를 택하는 조합의 수는 다음과 같이 구한다.

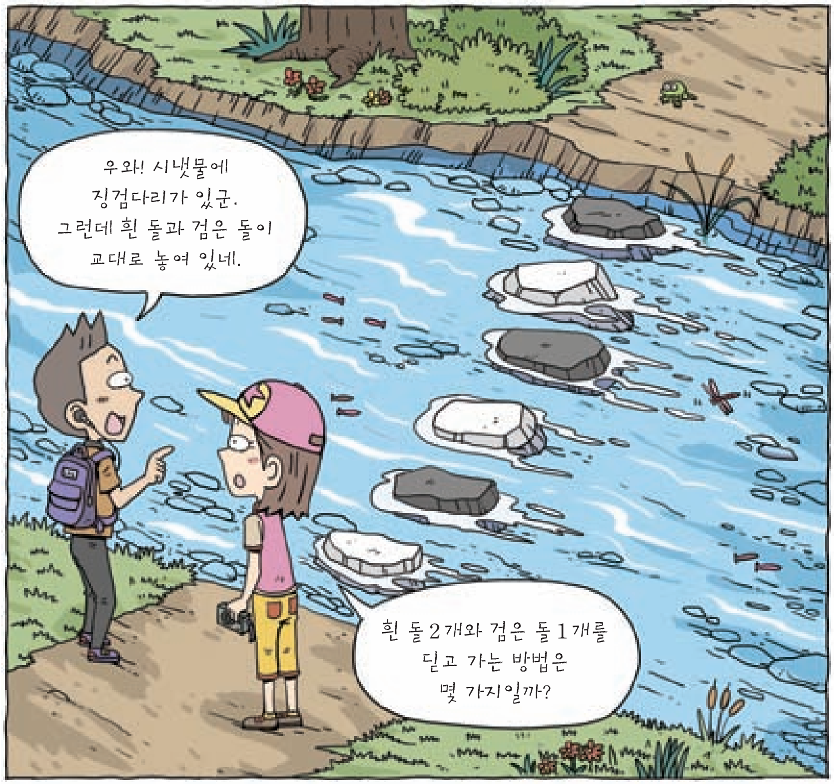
❶ $(n-1)$개의 연필로 n개의 구역을 만든다.
❷ r개의 지우개를 n개의 구역에 배열한다.
❸ 구하는 경우의 수는 $(n+r-1)$개에서 r개를 택하는 조합의 수인 ${}_{n+r-1}C_r$이다.

3 이항정리

학습 목표

- 이항정리를 이해한다.
- 이항정리를 이용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.

다 가 서 기 / **징검다리 건너기**



흰 돌 3개와 검은 돌 3개가 교대로 놓인 징검다리에서 흰 돌만 3개를 딛고 가는 방법은 1가지이다. 또한 검은 돌만 3개를 딛고 가는 방법도 1가지이다.

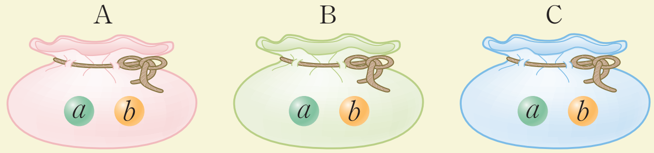
그러면 흰 돌 2개와 검은 돌 1개를 딛고 가는 방법은 몇 가지일까? 또 흰 돌 1개와 검은 돌 2개를 딛고 가는 방법은 몇 가지일까?

이 단원을 배우면 이러한 문제를 해결할 수 있다.

01 이항정리의 뜻

탐 구 하 기 / 다항식의 전개

아래 그림의 세 주머니 A, B, C에서 a, b 중 하나를 각각 꺼내어 곱하여 보자. 예를 들어 세 주머니 A, B, C에서 각각 a, b, a를 꺼내면 그 곱은 $aba=a^2b$가 된다. 다음 물음에 답하여 보자.



1. 주머니에서 a를 2개, b를 1개 꺼내는 경우의 수를 구하여라.
2. 곱이 a^2b가 되는 경우의 수를 ${}_n\mathrm{C}_r$의 꼴로 나타내어라.
3. 곱이 a^3, ab^2, b^3이 되는 경우의 수를 각각 ${}_n\mathrm{C}_r$의 꼴로 나타내어라.

알 아 보 기 / 이항정리의 뜻을 알아보자.

$(a+b)^n$의 각 항의 계수는 조합을 이용하여 구할 수 있다.

이를테면 다항식 $(a+b)^4$의 전개식을 구하여 보자.

$(a+b)^4$을 전개하면 a^4, a^3b, a^2b^2, ab^3, b^4의 항이 생긴다.

여기서 a^3b의 계수는 오른쪽 그림과 같이 4개의 인수 중에서 a를 3개, b를 1개 택하는 조합의 수 ${}_4\mathrm{C}_1$과 같다.

$$
\begin{array}{cccccl}
(a+b) & (a+b) & (a+b) & (a+b) & & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\
a & a & a & b & : & a^3b \\
a & a & b & a & : & a^3b \\
a & b & a & a & : & a^3b \\
b & a & a & a & : & a^3b
\end{array}
\left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\\a\end{array}}\right\}{}_4\mathrm{C}_1
$$

같은 방법으로 a^4, a^2b^2, ab^3, b^4의 계수를 각각 구하면 다음과 같다.

$${}_4\mathrm{C}_0,\ {}_4\mathrm{C}_2,\ {}_4\mathrm{C}_3,\ {}_4\mathrm{C}_4$$

따라서 $(a+b)^4$의 전개식은 다음과 같다.

$$(a+b)^4={}_4\mathrm{C}_0a^4+{}_4\mathrm{C}_1a^3b+{}_4\mathrm{C}_2a^2b^2+{}_4\mathrm{C}_3ab^3+{}_4\mathrm{C}_4b^4$$

일반적으로

$$(a+b)^n=\underbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{n\text{개}}$$

의 전개식에서 $a^{n-r}b^r$은 우변의 n개의 인수 $(a+b)$ 중 r개의 인수에서는 b를 택하고, $(n-r)$개의 인수에서는 a를 택하여 곱한 것이다. 이와 같은 경우의 수는 n개에서 r개를 택하는 조합의 수 ${}_n\mathrm{C}_r$와 같다.

따라서 $(a+b)^n$의 전개식에서 $a^{n-r}b^r$의 계수는 ${}_n\mathrm{C}_r$이다.

이처럼 두 개의 항으로 이루어진 $(a+b)$의 거듭제곱, 즉 $(a+b)^n$을 전개하는 것을 **이항정리**라고 한다.

이항정리

n이 자연수일 때

$$(a+b)^n={}_n\mathrm{C}_0\,a^n+{}_n\mathrm{C}_1\,a^{n-1}b+\cdots+{}_n\mathrm{C}_r\,a^{n-r}b^r+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\,b^n$$

${}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{n-r}$ 이므로 $(a+b)^n$의 전개식에서 $a^{n-r}b^r$과 a^rb^{n-r}의 계수는 같다.

또 $(a+b)^n$의 전개식에서 각 항의 계수

$${}_n\mathrm{C}_0,\ {}_n\mathrm{C}_1,\ {}_n\mathrm{C}_2,\ \cdots,\ {}_n\mathrm{C}_r,\ \cdots,\ {}_n\mathrm{C}_n$$

을 **이항계수**라 하고, $(r+1)$번째 항 ${}_n\mathrm{C}_r\,a^{n-r}b^r$을 일반항이라고 한다.

함께 하기 /

익힘책 71쪽 | 익힘책 72쪽 | 익힘책 73쪽

1 이항정리를 이용하여 $(2a+3b)^3$을 전개하여라.

풀이

$$\begin{aligned}(2a+3b)^3&={}_3\mathrm{C}_0(2a)^3+{}_3\mathrm{C}_1(2a)^2\cdot3b+{}_3\mathrm{C}_2\cdot2a(3b)^2+{}_3\mathrm{C}_3(3b)^3\\&=1\times8a^3+3\times4a^2\times3b+3\times2a\times9b^2+1\times27b^3\\&=\mathbf{8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3}\end{aligned}$$

스스로 하기 /

익힘책 71쪽 | 익힘책 72쪽 | 익힘책 73쪽

1 이항정리를 이용하여 다음 식을 전개하여라.

(1) $(a+b)^5$　　(2) $(2a+b)^4$

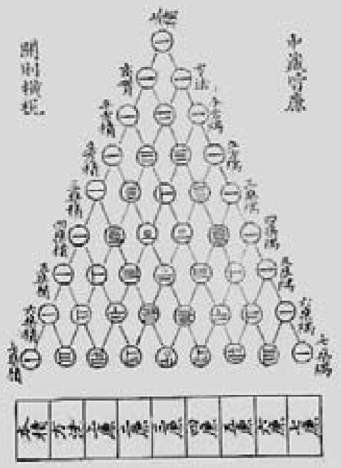
(3) $(a-b)^6$　　(4) $(2a-3b)^4$

알 아 보 기 / 이항계수의 배열과 그 특징에 대하여 알아보자.

$n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots$일 때, 다항식 $(a+b)^n$의 전개식은 다음과 같다.

$$(a+b)^0=1$$
$$(a+b)^1=1a+1b$$
$$(a+b)^2=1a^2+2ab+1b^2$$
$$(a+b)^3=1a^3+3a^2b+3ab^2+1b^3$$
$$(a+b)^4=1a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+1b^4$$
$$(a+b)^5=1a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+1b^5$$

이때, 각 항의 계수를 다음과 같이 삼각형 모양으로 나타낼 수 있다.



주세걸(朱世傑)의 사원옥감(四元玉鑑)
중국 송나라 시대의 수학자 가헌(賈憲)이 언급한 '파스칼의 삼각형'이 실려 있다.

$$\begin{array}{l|ccccccccccc}
n=0 & & & & & & 1 & & & & & \\
n=1 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
n=2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
n=3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
n=4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
n=5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\vdots & & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
\quad\Rightarrow\quad
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & {}_1C_0 & & {}_1C_1 & & & & \\
 & & & {}_2C_0 & & {}_2C_1 & & {}_2C_2 & & & \\
 & & {}_3C_0 & & {}_3C_1 & & {}_3C_2 & & {}_3C_3 & & \\
 & {}_4C_0 & & {}_4C_1 & & {}_4C_2 & & {}_4C_3 & & {}_4C_4 & \\
{}_5C_0 & & {}_5C_1 & & {}_5C_2 & & {}_5C_3 & & {}_5C_4 & & {}_5C_5 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}$$

이와 같은 이항계수의 배열을 **파스칼의 삼각형**이라고 한다.

파스칼의 삼각형에서 이항계수의 배열이 좌우 대칭이므로

$${}_nC_r={}_nC_{n-r}$$

가 성립한다. 또 각 단계에서 이웃하는 두 수의 합은 그 두 수의 아래의 중앙에 있는 수와 같으므로

$$\begin{array}{ccc} {}_{n-1}C_{r-1} & & {}_{n-1}C_r \\ & {}_nC_r & \end{array}$$

$${}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r={}_nC_r$$

임을 알 수 있다.

스 스 로 하 기 / 익힘책 71쪽 | 익힘책 72쪽 | 익힘책 73쪽

2 파스칼의 삼각형을 이용하여 다음을 만족하는 n과 r의 값을 구하여라.

(1) ${}_nC_r=6$ (2) ${}_nC_r+{}_nC_{r+1}={}_{10}C_4$

3 파스칼의 삼각형을 이용하여 다음 식을 전개하여라.

(1) $(x+y)^6$ (2) $(x-2y)^5$

02 이항정리의 성질

알 아 보 기 / 이항정리의 성질에 대하여 알아보자.

이항정리를 이용하여 $(1+x)^n$을 전개하면

$$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$$

이다. 이때, 이 전개식을 이용하면 여러 가지 이항정리의 성질을 증명할 수 있다.

함 께 하 기 /

익힘책 71쪽 | 익힘책 72쪽 | 익힘책 73쪽

1 다음 등식이 성립함을 증명하여라.

$${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$$

증명

이항정리에 의하여

$$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$$

이 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$(1+1)^n={}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n$$

$$\therefore\ {}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$$

x에 대한 항등식이므로 x에 어떤 값을 대입하여도 성립한다.

스 스 로 하 기 /

익힘책 71쪽 | 익힘책 72쪽 | 익힘책 73쪽

1 다음 식의 값을 구하여라.

(1) ${}_7C_0+{}_7C_1+{}_7C_2+\cdots+{}_7C_7$

(2) ${}_{10}C_0+{}_{10}C_1+{}_{10}C_2+\cdots+{}_{10}C_{10}$

2 다음 등식이 성립함을 증명하여라.

(1) ${}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-{}_nC_3+\cdots+(-1)^n{}_nC_n=0$

(2) n이 홀수일 때

$${}_nC_0+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_{n-1}={}_nC_1+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^{n-1}$$

모 둠 학 습

*각 모둠별로 토론하여 모둠 과제를 해결한 후, 발표자가 그 결과를 발표해 보세요.

- **학습 목표**_ 여러 가지 이항계수의 합을 알아보자.
- **학습 방법**_ 주어진 파스칼의 삼각형을 이용하여 각 모둠 과제를 해결한다.
- **모둠의 구성**_ 각자가 속한 모둠에 대하여 다음 표에 적어 보자.

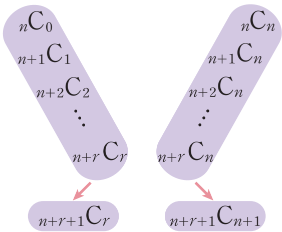
모둠 이름	모둠 인원: 명 으뜸이: 발표자:
	모둠 구성원 이름:

이항계수 ${}_{n}\mathrm{C}_{r}$를 $n=1,\ 2,\ \cdots,\ 8$까지 그리고 $r=0,\ \cdots,\ n$까지 차례로 쓰면 다음과 같다.

$$
\begin{array}{c}
1\\
{}_1\mathrm{C}_0\quad {}_1\mathrm{C}_1\\
{}_2\mathrm{C}_0\quad {}_2\mathrm{C}_1\quad {}_2\mathrm{C}_2\\
{}_3\mathrm{C}_0\quad {}_3\mathrm{C}_1\quad {}_3\mathrm{C}_2\quad {}_3\mathrm{C}_3\\
{}_4\mathrm{C}_0\quad {}_4\mathrm{C}_1\quad {}_4\mathrm{C}_2\quad {}_4\mathrm{C}_3\quad {}_4\mathrm{C}_4\\
{}_5\mathrm{C}_0\quad {}_5\mathrm{C}_1\quad {}_5\mathrm{C}_2\quad {}_5\mathrm{C}_3\quad {}_5\mathrm{C}_4\quad {}_5\mathrm{C}_5\\
{}_6\mathrm{C}_0\quad {}_6\mathrm{C}_1\quad {}_6\mathrm{C}_2\quad {}_6\mathrm{C}_3\quad {}_6\mathrm{C}_4\quad {}_6\mathrm{C}_5\quad {}_6\mathrm{C}_6\\
{}_7\mathrm{C}_0\quad {}_7\mathrm{C}_1\quad {}_7\mathrm{C}_2\quad {}_7\mathrm{C}_3\quad {}_7\mathrm{C}_4\quad {}_7\mathrm{C}_5\quad {}_7\mathrm{C}_6\quad {}_7\mathrm{C}_7\\
{}_8\mathrm{C}_0\quad {}_8\mathrm{C}_1\quad {}_8\mathrm{C}_2\quad {}_8\mathrm{C}_3\quad {}_8\mathrm{C}_4\quad {}_8\mathrm{C}_5\quad {}_8\mathrm{C}_6\quad {}_8\mathrm{C}_7\quad {}_8\mathrm{C}_8
\end{array}
\quad\Rightarrow\quad
\begin{array}{c}
1\\
1\quad 1\\
1\quad 2\quad 1\\
1\quad 3\quad 3\quad 1\\
1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1\\
1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1\\
1\quad 6\quad 15\quad 20\quad 15\quad 6\quad 1\\
1\quad 7\quad 21\quad 35\quad 35\quad 21\quad 7\quad 1\\
1\quad 8\quad 28\quad 56\quad 70\quad 56\quad 28\quad 8\quad 1
\end{array}
$$

| 모둠 과제1 | 각 모둠별로 위의 그림에서 다음을 확인하여 보자.

1. ${}_{n}\mathrm{C}_{0}+{}_{n+1}\mathrm{C}_{1}+{}_{n+2}\mathrm{C}_{2}+\cdots+{}_{n+r}\mathrm{C}_{r}={}_{n+r+1}\mathrm{C}_{r}$
2. ${}_{n}\mathrm{C}_{n}+{}_{n+1}\mathrm{C}_{n}+{}_{n+2}\mathrm{C}_{n}+\cdots+{}_{n+r}\mathrm{C}_{n}={}_{n+r+1}\mathrm{C}_{n+1}$



| 모둠 과제2 | **| 모둠 과제1 |** 을 이용하여 다음 값을 구하여 보자.

1. ${}_{2}\mathrm{C}_{0}+{}_{3}\mathrm{C}_{1}+{}_{4}\mathrm{C}_{2}+{}_{5}\mathrm{C}_{3}+{}_{6}\mathrm{C}_{4}+{}_{7}\mathrm{C}_{5}$
2. ${}_{2}\mathrm{C}_{2}+{}_{3}\mathrm{C}_{2}+{}_{4}\mathrm{C}_{2}+{}_{5}\mathrm{C}_{2}+{}_{6}\mathrm{C}_{2}+{}_{7}\mathrm{C}_{2}$

중복순열

문제 해결

1 여섯 명의 관광객이 A, B, C 세 종류의 관광 코스 중 하나씩을 택하는 경우의 수를 구하여라.

원순열

문제 해결

2 네 쌍의 부부가 원형의 식탁에 앉으려고 한다. 부부끼리 이웃하도록 앉는 경우의 수를 구하여라.

중복조합

이해

3 세 종류의 필기도구 연필, 색연필, 볼펜을 파는 문구점에서 5개의 필기도구를 사는 경우의 수를 구하여라.

중복조합의 활용

추론

4 $x+y+z=8$을 만족하는 x, y, z의 음이 아닌 정수해의 개수를 구하여라.

이항정리의 성질

계산

5 다음 식의 값을 구하여라.

(1) ${}_9C_0+{}_9C_2+{}_9C_4+{}_9C_6+{}_9C_8$

(2) ${}_{11}C_1+{}_{11}C_3+{}_{11}C_5+{}_{11}C_7+{}_{11}C_9+{}_{11}C_{11}$

소위원회의 구성

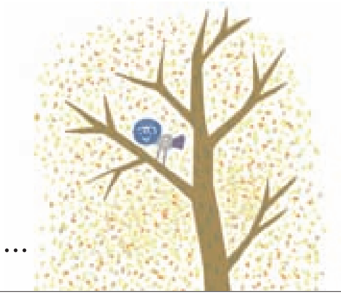
의사소통

6 어떤 위원회의 전체 위원의 수는 11명이다. 이들 중 2명 이상 5명 이하로 구성된 소위원회를 만들려고 한다. 이때, 만들 수 있는 경우의 수를 구하여라.

III 확률

복잡하고 방대한 자료를 과학적으로 정리하고 분석하여 미래를 예측할 때, 경우의 수와 확률이 널리 사용된다. 예를 들어 기상청에서는 과거의 기록 및 구름 사진 등과 같은 기상 자료를 바탕으로 다가올 날씨를 예측한다. 또한 생명 과학에서 특정 유전자가 나타날 확률을 알면 생명체의 신비를 풀 수 있다.

단원을 시작하기 전에 …



집합의 연산

1 두 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, $B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$에 대하여 다음을 구하여라.

(1) $A\cup B$　　(2) $A\cap B$　　(3) $A-B$

여집합의 뜻

2 전체집합 $U=\{n\,|\,n$은 10 이하의 자연수$\}$에 대하여 집합 $A=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$의 여집합 A^C를 구하여라.

도수분포표

3 다음 표는 어느 고등학교 학생을 대상으로 하루의 컴퓨터 사용 시간을 조사한 도수분포표이다. 빈칸에 알맞은 것을 써넣어라.

사용 시간(분)	30이상 ~40미만	40이상 ~50미만	50이상 ~60미만	60이상 ~70미만	70이상 ~80미만	합계
도수(명)	4	14		12	5	
상대도수	0.08		0.30		0.10	

중복순열과 중복조합

4 다음 값을 구하여라.

(1) ${}_{8}\Pi_{2}$　　(2) ${}_{8}\mathrm{H}_{2}$

확률의 뜻

5 정십이면체 모양인 주사위의 각 면에 1부터 12까지의 수가 적혀 있다. 이 주사위를 던져서 윗면에 나오는 눈의 수를 조사할 때, 다음을 구하여라.

(1) 홀수가 나올 확률　　(2) 3의 배수가 나올 확률

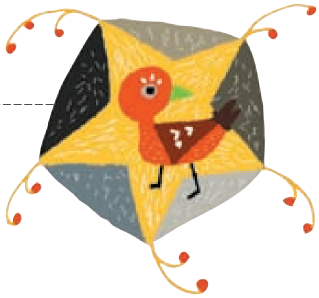
1 확률의 뜻과 활용

이 단원을 배우면

• 수학적 확률과 통계적 확률의 의미를 이해하고 그 관계를 이해할 수 있다.
• 확률의 기본 성질을 이해할 수 있다.
• 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
• 여사건의 확률의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다.

1 확률의 뜻과 기본 성질
2 확률의 계산과 활용

1 확률의 뜻과 기본 성질



학습 목표

- 시행의 뜻을 이해한다.
- 수학적 확률과 통계적 확률의 의미를 이해한다.
- 수학적 확률과 통계적 확률의 관계를 이해한다.
- 확률의 기본 성질을 이해한다.

다 가 서 기 / 상금의 배분

확률론에 대한 연구는 프랑스의 드 메레(de Méré, C.)가 그의 친구이자 수학자인 파스칼(Pascal, B. ; 1623～1662)에게 질문한 다음의 물음에서 유래하였다.

"실력이 같은 두 사람이 내기를 하여 먼저 3번을 이기는 사람이 상금을 다 가져가기로 하였다. 그런데 두 사람이 각각 2번과 1번을 이긴 상태에서 내기가 중단되었다. 상금을 어떻게 나누어야 할까?"

파스칼은 이 문제를 해결하기 위하여 페르마(Fermat, P. ; 1601～1665)와 편지를 주고받았고, 이러한 노력은 확률론의 기초 확립에 이바지하였다.

01 시행의 뜻

탐 구 하 기 / 같은 조건에서 반복 가능한 실험이나 관찰

다음은 우리 생활 주변에서 찾을 수 있는 여러 가지 실험(또는 관찰)이다. 조건을 같게 하여 몇 번이고 반복할 수 있는 실험(또는 관찰)을 찾아보자.

ㄱ. 개구리를 해부하여 심장의 박동을 조사한다.
ㄴ. 윷을 던져서 도, 개, 걸, 윷, 모가 나오는 횟수를 조사한다.
ㄷ. 어떤 회사에서 생산된 형광등의 수명 시간을 조사한다.
ㄹ. 여러 곳의 밭에 품종별로 옥수수를 심고 그 수확량을 조사한다.

알 아 보 기 / 시행의 뜻을 알아보자.

주사위 또는 동전을 던지거나 제비를 뽑는 경우와 같이, 같은 조건에서 몇 번이고 반복할 수 있으며 그 결과가 우연에 의해서 정해지는 실험이나 관찰을 **시행**이라고 한다.

어떤 시행에서 일어날 수 있는 모든 결과의 집합을 표본공간이라 하고, 표본공간의 부분집합을 사건이라고 한다. 또 표본공간 S의 부분집합 중에서 한 개의 원소로 이루어진 사건을 근원사건이라고 한다.

특별한 언급이 없는 한, '주사위를 던져서 윗면에 나오는 눈의 수를 관찰하는 시행'을 간단히 '주사위를 던지는 시행'이라고 한다.

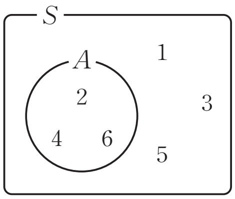
| 보기 | 한 개의 주사위를 던지는 시행에서 표본공간 S는

$$S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

이고, 이 시행의 근원사건은

$$\{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{4\},\ \{5\},\ \{6\}$$

이다. 또 짝수의 눈이 나오는 사건을 A라고 하면 $A=\{2,\ 4,\ 6\}$이다.



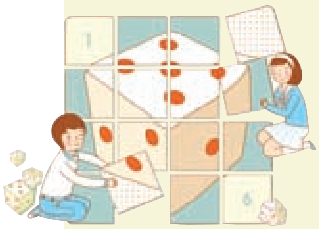
스 스 로 하 기 / 익힘책 81쪽 | 익힘책 82쪽 | 익힘책 83쪽

1 한 개의 동전을 두 번 던지는 시행에서 표본공간 S를 구하여라. 또 서로 다른 면이 나오는 사건 A를 구하여라.

(단, 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T로 나타낸다.)

02 수학적 확률

탐 구 하 기 / 주사위 던지기



한 개의 주사위를 던지는 시행에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. 나올 수 있는 눈의 수를 모두 구하여라.
2. 나오는 눈의 수가 짝수인 경우를 모두 구하여라.
3. 나오는 눈의 수가 짝수일 확률을 구하여라.

알 아 보 기 / 수학적 확률의 의미를 알아보자.

한 개의 주사위를 던지는 시행에서 어떤 눈의 수가 나올지 정확하게 예측할 수는 없다. 그러나 나오는 눈의 수는 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 어느 하나이므로 각 눈의 수가 나올 가능성은 모두 $\frac{1}{6}$이라고 할 수 있다.

이와 같이 어떤 시행에서 사건 A가 일어날 가능성을 수로 나타낸 것을 사건 A의 확률이라 하고, 기호로

$$\mathrm{P}(A)$$

와 같이 나타낸다.

P(A)의 P는 확률을 뜻하는 Probability의 첫 글자이다.

일반적으로 어떤 시행의 표본공간 S가 n개의 근원사건으로 이루어져 있고, 각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대될 때, 사건 A가 r개의 근원사건으로 이루어져 있으면 사건 A가 일어날 확률 $\mathrm{P}(A)$를

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{r}{n}$$

와 같이 정의하고, 이것을 **수학적 확률**이라고 한다.

$n(A)$: 사건 A의 근원사건의 개수

| 보기 | 한 개의 동전을 두 번 던질 때, 나올 수 있는 경우는 다음과 같다.

(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)

이때, 두 번 모두 앞면이 나오는 경우는 (H, H)의 한 가지이므로 두 번 모두 앞면이 나올 수학적 확률은 $\frac{1}{4}$이다.

특별한 언급이 없는 한, 동전의 앞면을 H, 동전의 뒷면을 T로 나타낸다.

스 스 로 하 기 /

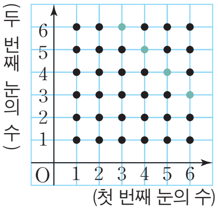
익힘책 81쪽 | 익힘책 82쪽 | 익힘책 83쪽

1 한 개의 동전을 두 번 던질 때, 서로 다른 면이 나올 확률을 구하여라.

함께하기 /

익힘책 81쪽 | 익힘책 82쪽 | 익힘책 83쪽

1 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 나오는 눈의 수의 합이 9가 될 확률을 구하여라.



풀이

한 개의 주사위를 두 번 던지는 시행에서 표본공간 S는

$$S=\{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ \cdots,\ (6,\ 5),\ (6,\ 6)\}$$

이므로 $n(S)=36$이다.

또 나오는 눈의 수의 합이 9인 사건을 A라고 하면

$$A=\{(3,\ 6),\ (4,\ 5),\ (5,\ 4),\ (6,\ 3)\}$$

이므로 $n(A)=4$이다.

따라서 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{4}{36}=\mathbf{\dfrac{1}{9}}$

2 남학생 2명과 여학생 3명이 한 줄로 설 때, 남학생 2명이 이웃하게 설 확률을 구하여라.

풀이

전체 학생 5명이 한 줄로 서는 경우의 수는 $5!$가지

남학생 2명을 묶어서 1명으로 생각하면, 전체 4명이 한 줄로 서는 경우의 수는 $4!$가지이고, 이 각각에 대하여 남학생 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!$가지이다.

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{4!2!}{5!}=\mathbf{\dfrac{2}{5}}$

스스로 하기 /

익힘책 81쪽 | 익힘책 82쪽 | 익힘책 83쪽

2 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 다음을 구하여라.

(1) 나오는 눈의 수의 합이 3의 배수일 확률

(2) 나오는 눈의 수의 차가 2일 확률

3 파란색, 검은색, 빨간색 볼펜이 각각 3자루, 4자루, 3자루씩 있다. 여기서 임의로 볼펜 3자루를 뽑을 때, 빨간색 볼펜이 1자루 포함될 확률을 구하여라.

03 통계적 확률

탐 구 하 기 / 동전 던지기에서 앞면이 나오는 상대도수

한 개의 동전을 다음 표에 나타난 횟수만큼 던져 보고, 앞면이 나온 횟수와 그 상대도수 및 상대도수와 $\frac{1}{2}$의 차를 구하여 빈칸을 채워 보자.

던진 횟수(n)	10	20	30	40	50	60	80	100
앞면이 나온 횟수(r)								
상대도수$\left(\frac{r}{n}\right)$								
상대도수와 $\frac{1}{2}$의 차								

알 아 보 기 / 통계적 확률의 의미를 알아보자.

수학적 확률은 각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대된다는 가정 하에 정의하였지만, 자연 현상이나 사회 현상 중에는 각 근원사건이 일어날 가능성이 같은 정도로 기대되지 않는 경우도 흔히 있다.

이와 같은 경우는 시행을 여러 번 반복함으로써 어떤 사건이 일어나는 전체적인 경향을 알아볼 수 있다.

일반적으로 어떤 시행을 n번 반복할 때 사건 A가 r_n번 일어난다고 하자.

이때, n을 한없이 크게 함에 따라 상대도수 $\frac{r_n}{n}$이 일정한 값 p에 가까워지면 p를 사건 A가 일어날 **통계적 확률**이라고 한다.

그러나 실제로는 시행 횟수 n을 한없이 크게 할 수는 없으므로 시행 횟수 n이 충분히 클 때의 상대도수 $\frac{r_n}{n}$을 보통 그 사건의 통계적 확률로 본다.

통계적 확률을 경험적 확률이라고도 한다.

한편 어떤 사건 A가 일어날 수학적 확률이 p일 때, 시행 횟수를 충분히 크게 하면 사건 A가 일어나는 상대도수 $\frac{r_n}{n}$은 수학적 확률 p에 가까워진다는 것이 알려져 있다.

| 보기 | 어떤 윷을 1000번 던져서 모가 27번 나왔다면, 이 윷을 한 번 던질 때 모가 나올 통계적 확률은 $\frac{27}{1000}$로 본다.

함께하기 /

익힘책 81쪽 | 익힘책 82쪽 | 익힘책 83쪽

1 오른쪽 표는 우리나라에서 출생한 남녀 각각 10만 명당 나이에 따른 생존자 수를 조사하여 나타낸 것이다. 다음을 구하여라. (단, 소수 셋째 자리에서 반올림한다.)

(1) 40세의 남자가 앞으로 40년간 생존할 확률

(2) 60세의 여자가 앞으로 20년간 생존할 확률

(단위: 명)

나이＼성별	남자	여자
0세	100000	100000
20세	99029	99247
40세	97352	98348
60세	87632	94748
80세	45216	68921

풀이

(1) 40세의 남자 97352명이 80세에는 45216명이 되므로 구하는 확률은

$$\frac{45216}{97352}=0.464\cdots\fallingdotseq\mathbf{0.46}$$

(2) 60세의 여자 94748명이 80세에는 68921명이 되므로 구하는 확률은

$$\frac{68921}{94748}=0.727\cdots\fallingdotseq\mathbf{0.73}$$

스스로 하기 /

익힘책 81쪽 | 익힘책 82쪽 | 익힘책 83쪽

1 함께하기 **1**에 주어진 표에서 다음을 구하여라.

(단, 소수 셋째 자리에서 반올림한다.)

(1) 20세의 남자가 앞으로 40년간 생존할 확률

(2) 20세의 여자가 앞으로 60년간 생존할 확률

2 2007년 우리나라에서 신생아의 수는 496710명이었고, 그중 쌍둥이의 수는 13537명이었다. 신생아가 쌍둥이로 태어날 확률을 구하여라.

(단, 소수 셋째 자리에서 반올림한다.)

생명표, 출산 현황 등의 관련 사이트 찾아보기

생명표, 출산 현황 등은 통계청 홈페이지나 국가통계포털(KOSIS)홈페이지에서 알아볼 수 있다.

• http://www.nso.go.kr • http://www.kosis.kr

04 확률의 기본 성질

탐 구 하 기 / 자판기에서 음료수 뽑기

자판기에 700원, 1000원, 1500원짜리 세 종류의 음료수가 들어 있다. 각 종류의 음료수를 택하는 버튼의 개수가 같을 때, 다음을 구하여 보자.

1. 500원을 넣고 임의로 버튼을 한 번 누를 때, 음료수가 나올 확률
2. 1000원을 넣고 임의로 버튼을 한 번 누를 때, 음료수가 나올 확률
3. 2000원을 넣고 임의로 버튼을 한 번 누를 때, 음료수가 나올 확률

알 아 보 기 / 확률의 기본 성질을 알아보자.

확률에는 어떤 성질이 있는지 알아보자.

어떤 시행에서 임의의 사건 A는 표본공간 S의 부분집합이므로

$$0 \le n(A) \le n(S)$$

따라서 $0 \le \dfrac{n(A)}{n(S)} \le 1$이므로 확률의 정의에 의하여 $\quad 0 \le \mathrm{P}(A) \le 1$

이때, 반드시 일어나는 사건은 S가 되므로 $\quad \mathrm{P}(S) = \dfrac{n(S)}{n(S)} = 1$

또 절대로 일어나지 않는 사건은 $\varnothing$이므로 $\quad \mathrm{P}(\varnothing) = \dfrac{n(\varnothing)}{n(S)} = 0$

이상을 정리하면 다음과 같다.

확률의 기본 성질

(1) 임의의 사건 A에 대하여 $\quad 0 \le \mathrm{P}(A) \le 1$

(2) 반드시 일어나는 사건 S에 대하여 $\quad \mathrm{P}(S) = 1$

(3) 절대로 일어나지 않는 사건 $\varnothing$에 대하여 $\quad \mathrm{P}(\varnothing) = 0$

스 스 로 하 기 /

익힘책 81쪽 | 익힘책 82쪽 | 익힘책 83쪽

1 어른 2명과 어린이 3명이 의자에 앉아 있다. 이 중에서 3명을 동시에 일어나게 할 때, 다음을 구하여라.

(1) 어린이가 3명 이하로 일어날 확률 (2) 어른 3명이 일어날 확률

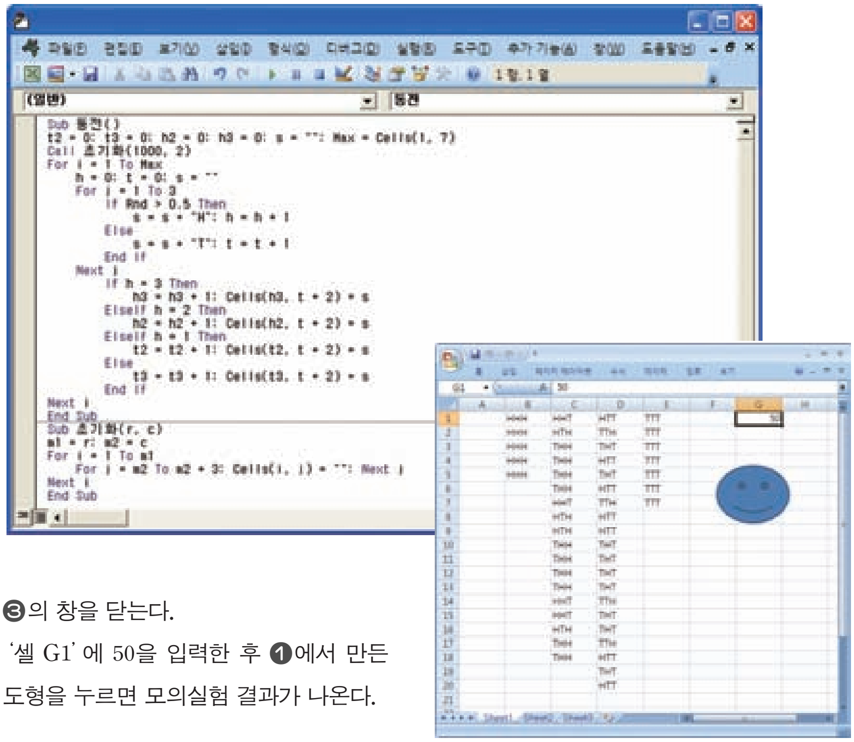
동전 던지기 모의실험

컴퓨터 프로그램을 이용하여 동전 3개를 동시에 50번 던지는 시행을 모의실험하여 보자.

❶ 메뉴 표시줄의 [삽입]−[도형]에서 도형 하나를 선택하고, 마우스를 클릭한 후 드래그하여 도형을 만든다.

❷ ❶에서 만든 도형 위에 커서를 놓고, 마우스의 오른쪽 버튼을 눌러 [매크로 지정]을 선택한다.

❸ 매크로 이름란에 ‘동전’을 입력하고, [새로 만들기]를 누르면 창이 뜬다. 여기에 다음 그림과 같이 입력한다.



❹ ❸의 창을 닫는다.

❺ ‘셀 G1’에 50을 입력한 후 ❶에서 만든 도형을 누르면 모의실험 결과가 나온다.

논술/수행 평가 과제

1. 모의실험 결과로부터 앞면이 2번, 뒷면이 1번 나올 통계적 확률을 구하고, 수학적 확률과 통계적 확률의 차이를 구하여 보자.
2. 위의 프로그램을 이용하여 동전 3개를 100번, 200번, 500번 던지는 시행을 모의실험하여 HHH, HTH, HTT, TTT의 4가지 사건이 일어날 통계적 확률을 각각 구하고, 수학적 확률과의 차이를 구하여 보자.

2 확률의 계산과 활용

학습 목표

- 배반사건의 뜻을 알고, 확률의 덧셈정리를 이해한다.
- 여사건의 뜻을 알고, 여사건의 확률을 이해한다.

다 가 서 기 / 생일이 같은 사람이 있을 확률

한 반의 학생의 수가 35명일 때, 생일이 같은 학생이 있을 확률을 구하여 보자.

1년을 366일로 생각하면 두 명의 학생이 있을 때, 두 학생의 생일이 다를 확률은 $\frac{365}{366}$이다.

세 명의 학생이 있을 때, 세 학생의 생일이 다를 확률은 세 번째 학생이 앞의 두 명과 생일이 달라야 하므로 $\frac{365}{366}\times\frac{364}{366}$이다. 마찬가지 방법으로 하면 35명의 생일이 모두 다를 확률은 다음과 같다.

$$\frac{365}{366}\times\frac{364}{366}\times\cdots\times\frac{332}{366}\fallingdotseq 0.1865$$

따라서 이 반에서 생일이 같은 학생이 나올 확률은 다음과 같다.

$$1-\frac{365}{366}\times\frac{364}{366}\times\cdots\times\frac{332}{366}\fallingdotseq 0.8135$$

01 확률의 덧셈정리

탐 구 하 기 / 동전의 앞, 뒷면 조사하기

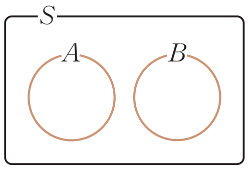
한 개의 동전을 두 번 던지는 시행에서 다음을 구하여 보자.

1. 두 번 모두 앞면이 나오는 사건 A
2. 두 번 모두 뒷면이 나오는 사건 B
3. 앞면이 적어도 한 번 나오는 사건 C
4. $A\cap B$, $B\cap C$, $A\cap C$

알 아 보 기 / 배반사건에 대하여 알아보자.

두 사건 A, B에 대하여 A 또는 B가 일어나는 사건을 $A\cup B$로 나타내고, A와 B가 동시에 일어나는 사건을 $A\cap B$로 나타낸다.

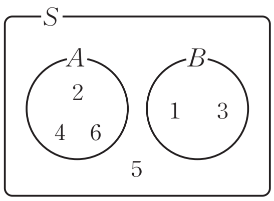
또 두 사건 A, B에 대하여 A와 B 중 어느 한 사건이 일어나면 다른 사건은 일어나지 않을 때, 즉



$$A\cap B=\varnothing$$

일 때, 두 사건 A, B는 서로 **배반사건**이라고 한다.

| 보기 | 한 개의 주사위를 던지는 시행에서 짝수의 눈이 나오는 사건을 A, 3의 약수의 눈이 나오는 사건을 B라고 하면



$$A=\{2,\ 4,\ 6\},\ B=\{1,\ 3\}$$

이다.

여기서 $A\cap B=\varnothing$이므로 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이다.

스 스 로 하 기 / 익힘책 87쪽 | 익힘책 88쪽 | 익힘책 89쪽

1 한 개의 주사위를 던지는 시행에서 6의 약수의 눈이 나오는 사건을 A라고 하자. 사건 A와 서로 배반인 사건을 모두 구하여라.

알 아 보 기 / 확률의 덧셈정리에 대하여 알아보자.

각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대되는 표본공간 S의 임의의 두 사건 A, B에 대하여

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

가 성립하므로 사건 $A\cup B$가 일어날 확률은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\frac{n(A\cup B)}{n(S)}\\&=\frac{n(A)}{n(S)}+\frac{n(B)}{n(S)}-\frac{n(A\cap B)}{n(S)}\\&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\end{aligned}$$

특히 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$이므로

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

확률의 덧셈정리

(1) 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$

(2) 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면, 즉 $A\cap B=\varnothing$이면

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$

스 스 로 하 기 /

익힘책 87쪽 | 익힘책 88쪽 | 익힘책 89쪽

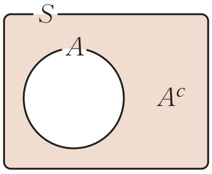
2 어느 마을에서 포도를 재배하는 가구는 전체의 $\frac{3}{5}$, 배를 재배하는 가구는 전체의 $\frac{1}{2}$이고 포도와 배를 모두 재배하는 가구는 전체의 $\frac{1}{5}$이다. 이 마을에서 한 가구를 임의로 택할 때, 그 가구가 포도 또는 배를 재배할 확률을 구하여라.

3 빨간 공 4개와 검은 공 6개가 들어 있는 상자에서 3개의 공을 꺼낼 때, 3개가 모두 같은 색일 확률을 구하여라.

02 여사건의 확률

알 아 보 기 / 여사건의 확률에 대하여 알아보자.

어떤 시행에서 사건 A가 일어나지 않는 사건을 A의 **여사건**이라 하고, 기호로 A^C과 같이 나타낸다.



이제 사건 A의 여사건 A^C의 확률을 구하여 보자.

$A \cup A^C = S$, $A \cap A^C = \varnothing$이므로 다음이 성립한다.

$$\mathrm{P}(S) = \mathrm{P}(A \cup A^C) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(A^C) = 1$$

$$\therefore \mathrm{P}(A^C) = 1 - \mathrm{P}(A)$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

여사건의 확률

임의의 사건 A에 대하여 $\quad \mathrm{P}(A^C) = 1 - \mathrm{P}(A)$

함 께 하 기 /

익힘책 87쪽 | 익힘책 88쪽 | 익힘책 89쪽

1 4명의 남자와 3명의 여자 중에서 2명의 대표를 뽑을 때, 적어도 1명은 여자일 확률을 구하여라.

풀이

적어도 1명은 여자일 사건을 A라고 하자. 이때, A^C은 여자가 1명도 뽑히지 않는 사건, 즉 2명 모두 남자일 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C) = \frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2} = \frac{2}{7}$$

따라서 2명의 대표를 뽑을 때, 적어도 1명은 여자일 확률은

$$\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(A^C) = 1 - \frac{2}{7} = \mathbf{\frac{5}{7}}$$

스 스 로 하 기 /

익힘책 87쪽 | 익힘책 88쪽 | 익힘책 89쪽

1 흰색 초콜릿 3개와 밤색 초콜릿 7개가 들어 있는 상자에서 3개의 초콜릿을 동시에 꺼낼 때, 적어도 1개가 흰색 초콜릿일 확률을 구하여라.

새로 나온 용어와 기호
시행, 수학적 확률, 통계적 확률, 배반사건, 여사건, $\mathrm{P}(A)$

이해

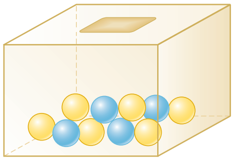
수학적 확률

1 한 개의 주사위를 던지는 시행에서 눈의 수가 6의 약수일 확률을 구하여라.

이해

수학적 확률

2 노란 구슬 6개와 파란 구슬 4개가 들어 있는 상자가 있다. 다음을 구하여라.



(1) 2개의 구슬을 동시에 꺼낼 때, 2개가 모두 노란 구슬일 확률

(2) 4개의 구슬을 동시에 꺼낼 때, 노란 구슬 2개, 파란 구슬 2개가 나올 확률

문제 해결

통계적 확률

3 어느 지역 주민 5만 명 중에서 625명이 환경 보호 단체의 회원이라고 한다. 이 지역 주민 1명을 택하였을 때, 그 사람이 환경 보호 단체의 회원일 확률을 구하여라.

이해

확률의 계산

4 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 다음을 구하여라.

(1) 두 번 모두 같은 눈의 수가 나올 확률

(2) 두 눈의 수의 합이 4의 배수가 될 확률

(3) 두 눈의 수의 차가 3이 될 확률

(4) 두 눈의 수의 합이 3 이상이 될 확률

의사소통

혈액형

5 어떤 모임에 10명이 참석하였는데 이들 중 3명의 혈액형이 A형이라고 한다. 이들 중 두 명을 임의로 택할 때, 다음을 구하여라.

(1) 두 명이 모두 A형일 확률

(2) 적어도 한 명이 A형일 확률

2 조건부확률

이 단원을 배우면

- 조건부확률의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.
- 사건의 독립과 종속의 의미를 이해할 수 있다.
- 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

1 조건부확률과 확률의 곱셈정리

1 조건부확률과 확률의 곱셈정리

학습 목표

- 조건부확률의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.
- 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
- 사건의 독립과 종속의 의미를 이해한다.
- 독립시행의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다.

다 가 서 기 / 당첨 제비뽑기

제비를 뽑을 때, 먼저 뽑는 사람이 당첨 제비를 뽑으면 나중에 뽑는 사람은 불리하고, 먼저 뽑는 사람이 당첨 제비를 뽑지 못하면 나중에 뽑는 사람이 유리하다.

그러나 먼저 뽑는 사람이 당첨 제비를 뽑을 수도 있고 뽑지 못할 수도 있으므로 결과적으로는 두 사람 모두 당첨 제비를 뽑을 확률은 같다.

01 조건부확률의 뜻

탐 구 하 기 / 조건이 주어진 확률 구하기

한 개의 주사위를 던질 때, 다음을 구하여 보자.

1. 나온 눈의 수가 짝수이면서 소수일 확률
2. 짝수가 나왔을 때, 그것이 소수일 확률

알 아 보 기 / 조건부확률의 뜻을 알아보자.

오른쪽 표는 어느 풍물패 동아리의 회원 구성을 나타낸 것이다.

	1학년	2학년	합계
남자	10	6	16
여자	7	7	14
합계	17	13	30

회원 중에서 임의로 한 명을 뽑았더니 남자가 선택되었다. 이 사람이 2학년일 확률을 구하여 보자.

한 명을 뽑을 때 전체 사건을 S, 뽑힌 사람이 남자일 사건을 A, 2학년일 사건을 B라고 하면

$$n(S)=30,\ n(A)=16,\ n(B)=13,\ n(A\cap B)=6$$

따라서 회원 중에서 한 명을 뽑을 때 뽑힌 사람이 2학년 남자일 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{6}{30}$$

그러나 뽑힌 사람이 남자일 때, 그 사람이 2학년일 확률은

$$\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{6}{16}$$

일반적으로 어떤 시행에서 사건 A가 일어났을 때, 사건 B가 일어날 확률을 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 **조건부확률**이라 하고, 기호로

$$\mathrm{P}(B|A)$$

와 같이 나타낸다. 이때

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{\dfrac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\dfrac{n(A)}{n(S)}}=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}\ (\text{단, } \mathrm{P}(A)\neq 0)$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

조건부확률

사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)} \text{ (단, } \mathrm{P}(A)\neq 0)$$

함 께 하 기 /

익힘책 95쪽 | 익힘책 96쪽 | 익힘책 97쪽

1 한 개의 주사위를 던져서 나온 눈의 수가 소수일 때, 그것이 홀수일 확률을 구하여라.

풀이

소수의 눈이 나오는 사건을 A, 홀수의 눈이 나오는 사건을 B라고 하면

$$A=\{2,\ 3,\ 5\},\ B=\{1,\ 3,\ 5\},\ A\cap B=\{3,\ 5\}$$

구하는 확률은 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}}=\mathbf{\frac{2}{3}}$$

스 스 로 하 기 /

익힘책 95쪽 | 익힘책 96쪽 | 익힘책 97쪽

1 오른쪽 표는 어느 동아리 학생 30명에 대하여 안경을 쓴 학생의 수를 남녀별로 조사한 것이다. 다음을 구하여라.

(단위: 명)

	안경 씀	안경 안 씀	합계
남학생 수	6	10	16
여학생 수	5	9	14
합계	11	19	30

(1) 여학생 중에서 한 명을 뽑을 때, 그 학생이 안경을 쓴 학생일 확률

(2) 안경을 안 쓴 학생 중에서 한 명을 뽑을 때, 그 학생이 남학생일 확률

2 CD를 만드는 두 회사 A, B의 제품 불량률은 각각 2 %와 3 %이다. 두 회사 A, B의 CD가 각각 100장씩 섞여 있는 상자 안에서 1장을 꺼냈더니 불량품이었다. 이 불량품이 A 회사의 제품일 확률을 구하여라.

02 확률의 곱셈정리

알 아 보 기 / 확률의 곱셈정리를 알아보자.

조건부확률의 정의에서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$임을 알 수 있다. 또한 A, B를 바꾸어 생각하면 다음의 곱셈정리를 얻는다.

확률의 곱셈정리

두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)$$

(단, $\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$)

함 께 하 기 / 익힘책 95쪽 | 익힘책 96쪽 | 익힘책 97쪽

1 10개의 송편 중에서 4개에는 콩이 들어 있고 6개에는 깨가 들어 있다. 이 중에서 두 개의 송편을 먹을 때, 첫 번째는 깨가 들어 있는 송편을 먹고 두 번째는 콩이 들어 있는 송편을 먹을 확률을 구하여라.

풀이

첫 번째에 깨가 들어 있는 송편을 먹는 사건을 A라고 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

두 번째에 콩이 들어 있는 송편을 먹는 사건을 B라고 하면, 첫 번째에 깨가 들어 있는 송편을 먹었을 때, 두 번째에 콩이 들어 있는 송편을 먹을 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{4}{9}$$

따라서 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{9}=\mathbf{\frac{4}{15}}$

스 스 로 하 기 / 익힘책 95쪽 | 익힘책 96쪽 | 익힘책 97쪽

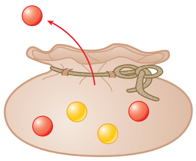
1 흰색 탁구공 4개와 노란색 탁구공 8개가 들어 있는 상자에서 탁구공을 임의로 한 개씩 두 번 꺼낼 때, 첫 번째는 흰색 탁구공이 나오고 두 번째는 노란색 탁구공이 나올 확률을 구하여라.

(단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.)

03 사건의 독립과 종속

알 아 보 기 / 사건의 독립과 종속에 대하여 알아보자.

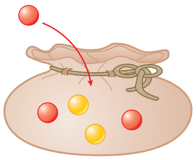
같은 크기의 노란 공 2개와 빨간 공 3개가 들어 있는 주머니에서 공을 한 개씩 두 번 꺼내는 경우를 생각하자. 첫 번째에 빨간 공이 나오는 사건을 A, 두 번째에 빨간 공이 나오는 사건을 B라고 할 때, 다음을 알아보자.



(i) 꺼낸 공을 다시 넣지 않을 때

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(B|A^C)=\frac{3}{4}\text{이므로}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B)&=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)\\&=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}\end{aligned}$$



(ii) 꺼낸 공을 다시 넣을 때

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{5},\ \mathrm{P}(B|A^C)=\frac{3}{5}\text{이므로}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B)&=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)\\&=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{15}{25}=\frac{3}{5}\end{aligned}$$

조건부확률 $\mathrm{P}(B|A)$는 일반적으로 $\mathrm{P}(B)$와 같지 않다. 그러나

$$\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)\ \ (\text{또는 } \mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A))$$

가 성립할 때, 즉 사건 A가 일어나는 것이 사건 B가 일어나는 (또는 사건 B가 일어나는 것이 사건 A가 일어나는)확률에 영향을 주지 않을 때, 두 사건 A, B는 서로 **독립**이라고 한다.

또 두 사건이 서로 독립이 아닐 때, 두 사건은 서로 **종속**이라고 한다.

한편 독립인 두 사건 A, B에 대하여 확률의 곱셈정리를 적용하면

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

임을 알 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

$\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$인 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$이면 $\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$이다.

(ii)에서 $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A, B는 서로 독립이고, (i)에서 $\mathrm{P}(B|A)\neq\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A, B는 서로 종속이다.

독립인 사건에 대한 확률의 곱셈정리

두 사건 A, B가 서로 독립이기 위한 필요충분조건은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\ \ (\text{단, } \mathrm{P}(A)>0,\ \mathrm{P}(B)>0)$$

함께하기 /

익힘책 95쪽 | 익힘책 96쪽 | 익힘책 97쪽

1 1에서 10까지의 자연수 중에서 임의로 한 개의 자연수를 택할 때, 짝수가 나오는 사건을 A, 3의 배수가 나오는 사건을 B, 5의 배수가 나오는 사건을 C라고 하자. 다음 물음에 답하여라.

(1) 두 사건 A, B는 서로 종속임을 보여라.

(2) 두 사건 A, C는 서로 독립임을 보여라.

풀이

세 사건 A, B, C는 각각 다음과 같다.

$$A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\},\ B=\{3,\ 6,\ 9\},\ C=\{5,\ 10\}$$

(1) $A\cap B=\{6\}$이므로 $\quad \mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{10}$

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\dfrac{3}{10}$이므로 $\quad \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{10}=\dfrac{3}{20}$

$\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A, B는 서로 종속이다.

(2) $A\cap C=\{10\}$이므로 $\quad \mathrm{P}(A\cap C)=\dfrac{1}{10}$

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C)=\dfrac{1}{5}$이므로 $\quad \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{10}$

$\mathrm{P}(A\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$이므로 두 사건 A, C는 서로 독립이다.

스스로 하기 /

익힘책 95쪽 | 익힘책 96쪽 | 익힘책 97쪽

1 정사면체의 각 면에 1, 2, 3, 4가 적혀 있다. 이 정사면체를 던져서 밑면에 있는 수를 관찰할 때, 세 사건

$$A=\{1,\ 2\},\ B=\{2,\ 3\},\ C=\{3,\ 4\}$$

에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 두 사건 A, B는 서로 독립임을 보여라.

(2) 두 사건 A, C는 서로 종속임을 보여라.

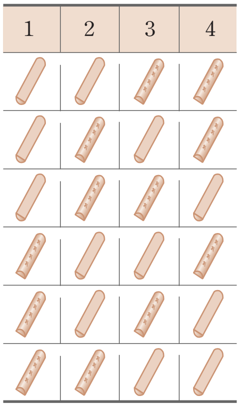
2 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 첫 번째는 소수의 눈이 나오고 두 번째는 합성수의 눈이 나올 확률을 구하여라.

04 독립시행

알 아 보 기 / 독립시행의 뜻과 그 확률을 알아보자.

동전 또는 주사위를 던지거나 뽑은 제비를 되돌려 놓고 다시 뽑는 경우 등과 같이 각각 같은 조건으로 반복되고 다른 시행의 결과에 영향을 받지 않는 시행을 **독립시행**이라고 한다.

윷짝의 앞면: 평평한 면
윷짝의 뒷면: 볼록한 면



앞면이 나올 확률이 $\frac{3}{5}$인 윷짝 한 개를 던지는 시행을 4번 할 때, 윷짝의 앞면이 2번 나올 확률을 생각해 보자.

윷짝의 뒷면이 나올 확률은 $\frac{2}{5}$이므로 앞면 2번, 뒷면 2번이 차례로 나올 확률은 $\left(\frac{3}{5}\right)^2\times\left(\frac{2}{5}\right)^2$이다. 그런데 4번의 시행에서 윷짝의 앞면이 2번 나오는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2$가지이고, 이들 ${}_4\mathrm{C}_2$가지의 경우가 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{216}{625}$$

일반적으로 독립시행에 대하여 다음이 성립한다.

독립시행의 확률

1회의 시행에서 사건 A가 일어날 확률을 p라고 할 때, n회의 독립시행에서 사건 A가 r회 일어날 확률 P_r는

$$\mathrm{P}_r={}_n\mathrm{C}_r p^r q^{n-r}\ (\text{단, } q=1-p\ , r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

| 보기 | 어떤 클레이 사격 선수의 평균 명중률이 90 %라고 한다. 이 선수가 4발을 쏘았을 때, 3발 이상 명중시킬 확률은

$${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{9}{10}\right)^3\left(\frac{1}{10}\right)^1+{}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{9}{10}\right)^4\left(\frac{1}{10}\right)^0=\frac{2916+6561}{10000}$$
$$=\frac{9477}{10000}$$

클레이 사격
점토로 구워 만든 접시를 투사기로 쏘아 올려 산탄총으로 하나씩 사격하여 깨뜨린 접시의 수로 승부를 겨루는 경기

스 스 로 하 기 / 익힘책 95쪽 | 익힘책 96쪽 | 익힘책 97쪽

1 한 개의 주사위를 4번 던질 때, 눈의 수가 3 또는 6이 나오는 경우가 적어도 2번일 확률을 구하여라.

중 단 원 확 인 하 기

■ 새로 나온 용어와 기호
조건부확률, 독립, 종속, 독립시행, $\mathrm{P}(B|A)$

조건부확률

계산

1 두 사건 A, B에 대하여 다음이 성립할 때, $\mathrm{P}(A|B)$를 각각 구하여라.

(1) $\mathrm{P}(B)=0.4$, $\mathrm{P}(A^C \cup B^C)=0.7$

(2) $\mathrm{P}(A)=0.8$, $\mathrm{P}(B)=0.2$, $\mathrm{P}(A^C \cap B^C)=0.1$

확률의 곱셈정리

이해

2 어떤 수학 문제를 A, B, C 세 사람이 맞힐 확률은 각각 $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$이다. 이 문제를 세 명이 모두 맞힐 확률을 구하여라.

독립과 종속

추론

3 한 개의 주사위를 두 번 던지는 시행에서 두 눈의 수의 합이 소수인 사건을 A, 두 눈의 수의 합이 홀수인 사건을 B라고 하자. 두 사건 A, B는 서로 독립인지 종속인지를 말하여라.

독립시행의 확률

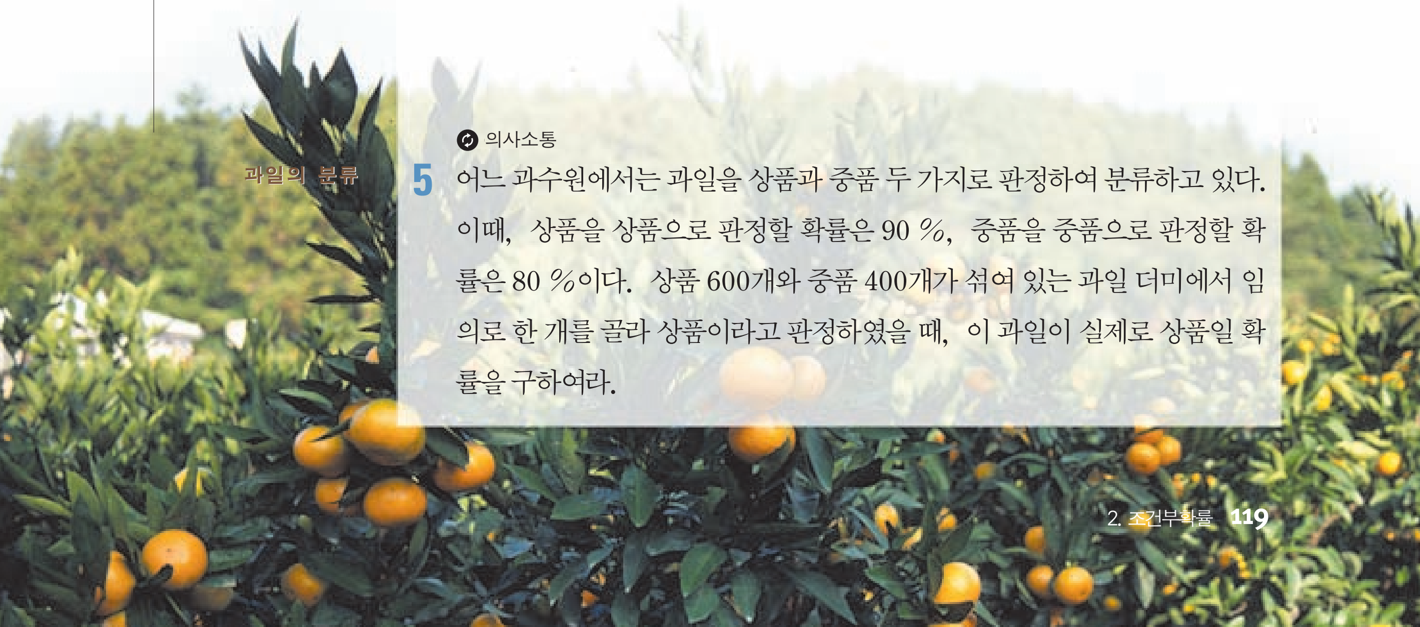
문제 해결

4 4문제를 풀면 3문제를 맞히는 학생이 있다. 5문제가 출제된 어떤 시험에서 3문제 이상을 맞히면 합격이라고 할 때, 이 학생이 시험에 합격할 확률을 구하여라.

과일의 분류

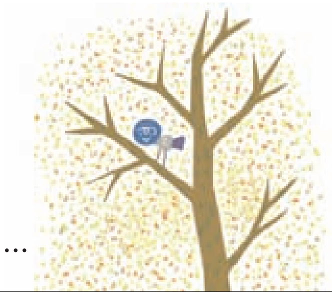
의사소통

5 어느 과수원에서는 과일을 상품과 중품 두 가지로 판정하여 분류하고 있다. 이때, 상품을 상품으로 판정할 확률은 90 %, 중품을 중품으로 판정할 확률은 80 %이다. 상품 600개와 중품 400개가 섞여 있는 과일 더미에서 임의로 한 개를 골라 상품이라고 판정하였을 때, 이 과일이 실제로 상품일 확률을 구하여라.



IV 통계

우리는 미국, 일본, 중국의 기후는 물론이고 우리나라와 지구 반대편에 있는 브라질의 기후도 우리 경제에 커다란 영향을 끼치는 시대에 살고 있다. 다양한 사회 현상과 복잡한 자연 현상을 규명하여 행복한 삶을 유지하기 위해서는 우연히 일어나는 작은 사건에도 주목하여야 하고, 우연한 현상 속에서 규칙성을 찾을 수 있는 통계적 추론 능력을 갖추어야 한다.



단원을 시작하기 전에 …

확률

1 한 개의 동전을 세 번 던질 때, 앞면이 두 번 나올 확률을 구하여라.

확률의 기본 성질

2 다음 $\square$ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

(1) 임의의 사건 A에 대하여 $\square \le \mathrm{P}(A) \le \square$이다.

(2) 반드시 일어나는 사건 S에 대하여 $\mathrm{P}(S) = \square$이다.

(3) 절대로 일어나지 않는 사건 $\varnothing$에 대하여 $\mathrm{P}(\varnothing) = \square$이다.

합의 기호 Σ

3 다음을 $\sum$를 써서 나타내어라.

(1) $x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n$

(2) $(x_1 - m)^2 p_1 + (x_2 - m)^2 p_2 + \cdots + (x_n - m)^2 p_n$

평균, 표준편차

4 어느 학생이 5번 치른 수학 시험 점수가 다음과 같다. 수학 시험 점수의 평균과 표준편차를 구하여라.

85, 81, 88, 89, 82

이항정리

5 다음 식의 전개식에서 [ ] 안의 항의 계수를 구하여라.

(1) $(a+b)^4$ $[a^3 b]$ (2) $(2a+3b)^5$ $[a^3 b^2]$

1 확률분포

이 단원을 배우면

- 확률변수와 확률분포의 뜻을 알 수 있다.
- 이산확률변수의 뜻을 알고, 확률질량함수의 성질을 이해할 수 있다.
- 연속확률변수의 뜻을 알고, 확률밀도함수의 성질을 이해할 수 있다.
- 확률변수의 평균과 표준편차를 구할 수 있다.
- 이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다.
- 정규분포의 뜻과 그 성질을 이해할 수 있다.

1 확률변수와 확률분포

학습 목표

- 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다.
- 이산확률변수의 뜻을 알고, 확률질량함수의 성질을 이해한다.
- 연속확률변수의 뜻을 알고, 확률밀도함수의 성질을 이해한다.

다 가 서 기 / 로또 1등 당첨 확률

로또(lotto)는 1971년 6월 미국의 뉴저지 주에서 시작되어 전 세계에 퍼졌다. 우리나라에는 2002년 12월에 처음으로 로또가 발매되었으며, 그 방식은 45개의 수 중에서 6개를 맞히면 1등이 되는 6/45이다.

로또에서 번호 4개, 5개가 일치할 확률은 각각 $\frac{11115}{8145060}$, $\frac{234}{8145060}$이다.

01 확률변수의 뜻

탐 구 하 기 / 동전을 세 번 던질 때, 앞, 뒷면 조사하기

한 개의 동전을 세 번 던지는 시행에서 앞면을 H, 뒷면을 T로 나타내자. 표본공간을 S라고 할 때, 다음 $\boxed{}$ 안에 알맞은 것을 써넣어 보자.


앞면(H) 뒷면(T)

$$S=\{\mathrm{TTT},\ \mathrm{TTH},\ \mathrm{THT},\ \mathrm{HTT},\ \boxed{},\ \boxed{},\ \boxed{},\ \boxed{}\}$$

알 아 보 기 / 확률변수의 뜻을 알아보자.

한 개의 동전을 두 번 던지는 시행에서 앞면이 나오는 횟수를 X라고 하면 표본공간 S의 각 원소

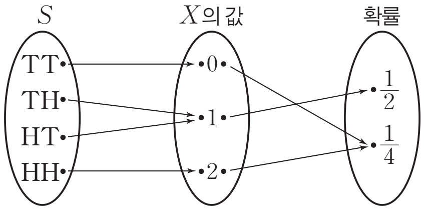
$$\mathrm{TT},\ \mathrm{TH},\ \mathrm{HT},\ \mathrm{HH}$$

에 대응하는 X의 값은 각각 다음과 같다.

$$0,\quad 1,\quad 1,\quad 2$$

$X=0 \Longleftrightarrow \{\mathrm{TT}\}$
$X=1 \Longleftrightarrow \{\mathrm{HT},\ \mathrm{TH}\}$
$X=2 \Longleftrightarrow \{\mathrm{HH}\}$

즉, X는 0, 1, 2 중에서 한 값을 가지는 변수이고, X의 각 값에 대응하는 확률은 오른쪽 그림과 같다.



이와 같이 어떤 시행의 결과에 따라 표본공간의 각 원소에 하나의 실수의 값을 대응시켜 주는 것을 **확률변수**라고 한다.

확률변수를 생각함으로써 표본공간을 수량화할 수 있다.

| 참고 | 확률변수는 표본공간을 정의역으로 하고 실수 전체의 집합을 공역으로 하는 함수이다. 그러나 변수의 역할을 하므로 확률변수라고 부른다.

스 스 로 하 기 / 익힘책 107쪽 | 익힘책 108쪽 | 익힘책 109쪽

1 한 개의 동전을 네 번 던지는 시행에서 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 할 때, X가 가지는 값을 구하여라.

02 이산확률변수와 확률질량함수

알 아 보 기 / 이산확률변수와 확률질량함수를 알아보자.

확률변수는 보통 대문자 X, Y, Z, $\cdots$로 나타내고, 확률변수가 가지는 값은 소문자 x, y, z, $\cdots$ 또는 x_1, x_2, x_3, $\cdots$으로 나타낸다.

확률변수 X가 유한개의 값 또는 자연수와 같이 셀 수 있는 값을 가질 때, X를 **이산확률변수**라 하고, X가 어떤 값 x를 가질 확률을 기호로

$$\mathrm{P}(X=x)$$

와 같이 나타낸다.

이때, 확률 $\mathrm{P}(X=x)$는 x의 값에 따라 달라지는 함수가 되며, 이것을 **확률질량함수**라고 한다.

또 이산확률변수 X가 가지는 값과 그 값을 가질 확률과의 대응 관계를 X의 **확률분포**라고 한다.

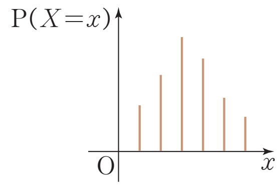
이산확률변수 X는 무한개의 값을 가질 때도 있지만 여기에서는 유한개의 값을 가지는 경우만 다루기로 한다.

확률분포를 식으로 나타내면

$$\mathrm{P}(X=x_i)=p_i \ (\text{단, } i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

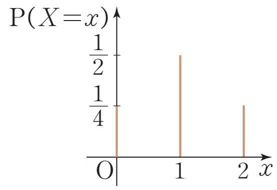
이고, 표로 나타내면 다음과 같다. 또한 확률분포를 그래프로도 나타낼 수 있으며, 이때 보통 선 그래프를 사용한다.

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n	합계
$\mathrm{P}(X=x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$	p_n	1



| 보기 | 한 개의 동전을 두 번 던지는 시행에서 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 할 때, X의 확률분포를 표와 그래프로 나타내면 각각 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1



일반적으로 확률질량함수에 대하여 다음이 성립한다.

확률질량함수의 성질

(1) $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i \geq 0$ (단, $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$)

(2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i=1$

(3) $\mathrm{P}(x_i \leq X \leq x_j)=\displaystyle\sum_{k=i}^{j} p_k$ (단, $i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$이고, $i \leq j$이다.)

함께 하기 /

익힘책 107쪽 | 익힘책 108쪽 | 익힘책 109쪽

1 남학생 5명과 여학생 3명으로 구성되어 있는 어떤 수학 경시 팀에서 임의로 3명의 대표를 선발할 때, 선발되는 여학생의 수를 확률변수 X라고 하자. 다음 물음에 답하여라.

(1) X의 확률분포를 표와 그래프로 나타내어라.

(2) 여학생이 2명 이상 선발될 확률을 구하여라.

풀이

(1) 확률변수 X가 가지는 값은 0, 1, 2, 3이므로 각각의 확률을 구하면

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_5\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_0}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{5}{28}$$

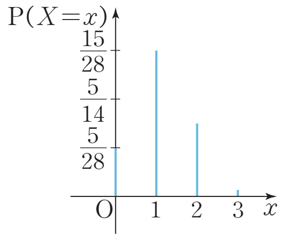
$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_5\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{15}{28}$$

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_5\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{15}{56}$$

$$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_5\mathrm{C}_0\times{}_3\mathrm{C}_3}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{1}{56}$$

따라서 X의 확률분포를 표와 그래프로 나타내면 각각 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{5}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$	1



(2) 여학생이 2명 이상 선발되는 것은 $X\geq 2$인 경우이므로 그 확률은

$$\mathrm{P}(X\geq 2)=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)$$

$$=\frac{15}{56}+\frac{1}{56}=\mathbf{\frac{2}{7}}$$

스스로 하기 /

익힘책 107쪽 | 익힘책 108쪽 | 익힘책 109쪽

1 한 개의 주사위를 두 번 던지는 시행에서 나오는 눈의 수의 합을 확률변수 X라고 하자. 다음 물음에 답하여라.

(1) 확률변수 X의 확률분포를 표와 그래프로 나타내어라.

(2) 눈의 수의 합이 5 이상 7 이하가 될 확률을 구하여라.

(3) 눈의 수의 합이 3 이상이 될 확률을 구하여라.

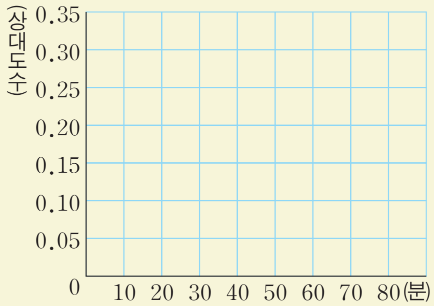
03 연속확률변수와 확률밀도함수

탐 구 하 기 / 히스토그램을 곡선으로 나타내기

아래 표는 A 고등학교 학생 100명의 통학 시간을 조사하여 만든 것이다. 다음 물음에 답하여 보자.

1. 상대도수를 구하여 표를 완성하고, 상대도수의 합은 1임을 확인하여라.
2. 상대도수의 그래프를 히스토그램으로 그리고, 각 막대의 윗변의 중점을 곡선으로 연결하여라.

계급(분)	도수(명)	상대도수
10이상~20미만	5	0.05
20 ~30	15	
30 ~40	20	
40 ~50	30	0.30
50 ~60	15	
60 ~70	10	
70 ~80	5	0.05
합계	100	1



알 아 보 기 / 연속확률변수와 확률밀도함수를 알아보자.

농작물의 무게, 사람의 키, 통학 시간 등의 측정값을 확률변수 X라고 하면 X는 이산확률변수와는 달리, 어떤 연속하는 범위 안에서 값을 가지게 된다.

이와 같이 어떤 구간의 모든 실수의 값을 가지는 확률변수를 **연속확률변수**라고 한다.

연속확률변수가 가지는 값은 어떤 구간의 모든 실수이므로 '$X=a$'의 확률을 계산하는 것은 의미가 없고, 대신 주어진 구간의 확률을 생각한다.

이를테면

'통학 시간이 30분 이상 50분 미만이 될 확률'

'키가 170 cm에서 180 cm 사이에 있을 확률'

등을 생각하는 것이 의미가 있다.

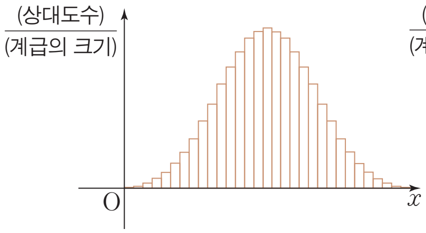
X가 연속확률변수일 때, $\mathrm{P}(X=a)=0$으로 한다. 따라서 다음이 성립한다.

$$\mathrm{P}(a\le X\le b)=\mathrm{P}(a\le X<b)=\mathrm{P}(a<X\le b)=\mathrm{P}(a<X<b)$$

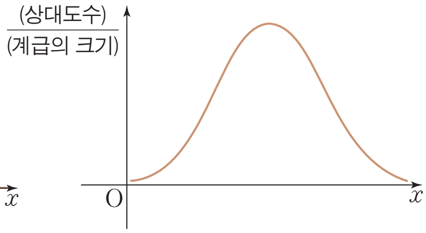
$\dfrac{(\text{상대도수})}{(\text{계급의 크기})}$를 생각하는 것은 히스토그램의 넓이 또는 도수분포다각형 내부의 넓이를 1로 만들기 위해서이다.

이와 같은 측정에서 조사 대상의 수를 늘리고, 상대도수의 분포표에서 계급의 크기를 줄여서 $\dfrac{(\text{상대도수})}{(\text{계급의 크기})}$의 히스토그램을 그리면 | 그림1 | 과 같이 될 것이다.

또 조사 대상의 수를 한없이 늘리고, 계급의 크기를 더욱 줄이면 히스토그램의 윗변의 중점을 연결하여 그린 도수분포다각형은 | 그림2 | 와 같이 매끄러운 곡선에 가까워질 것이다.



| 그림1 |



| 그림2 |

이때, 이 곡선은 항상 x축보다 위쪽 부분에 있고 이 곡선과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이 된다.

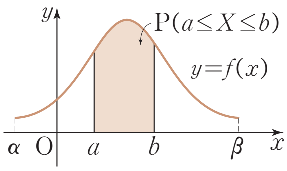
이러한 곡선은 어떤 함수의 그래프가 되는데 이 함수를 연속확률변수 X의 **확률밀도함수**라고 한다.

일반적으로 구간 $[\alpha,\ \beta]$의 모든 값을 가지는 확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)$일 때, X가 구간 $[a,\ b]\ (\alpha \le a \le b \le \beta)$에 속할 확률은

$$\mathrm{P}(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

로 주어진다.

여기서 $\mathrm{P}(a \le X \le b)$를 그림으로 나타내면 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이이다.



| 참고 | $f(a)$는 $x=a$에서의 확률이 아니고 단지 $x=a$에서의 함숫값이다.

일반적으로 확률밀도함수 $f(x)$에 대하여 다음이 성립한다.

확률밀도함수의 성질은 확률질량함수의 성질과 유사하다.

확률밀도함수의 성질

연속확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)\ (\alpha \le x \le \beta)$이면

(1) $f(x) \ge 0$

(2) $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = 1$

(3) $\mathrm{P}(a \le X \le b) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ (단, $\alpha \le a \le b \le \beta$)

함께 하기 /

익힘책 107쪽 | 익힘책 108쪽 | 익힘책 109쪽

1 어떤 역에서 지하철을 기다리는 시간을 확률변수 X라고 하자. X의 확률밀도함수 $f(x)$가 다음과 같이 주어질 때, 물음에 답하여라.

$$f(x)=kx(10-x)\ (\text{단, } 0\le x\le 10)$$

(1) 상수 k의 값을 구하여라.

(2) 기다리는 시간이 3분 이하일 확률을 구하여라.

풀이

(1) $f(x)$는 확률밀도함수이므로 $\int_0^{10} f(x)dx=1$

즉, $\int_0^{10} kx(10-x)dx=1$이므로

$$\left[-\frac{k}{3}x^3+5kx^2\right]_0^{10}=\frac{500}{3}k=1$$

$$\therefore k=\mathbf{\frac{3}{500}}$$

기다리는 시간이 3분 이하
$\Longleftrightarrow 0\le X\le 3$

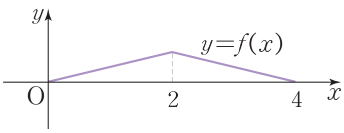
(2) $P(0\le X\le 3)=\int_0^3 \frac{3}{500}x(10-x)dx$

$$=\frac{3}{500}\left[-\frac{1}{3}x^3+5x^2\right]_0^3=\mathbf{0.216}$$

스스로 하기 /

익힘책 107쪽 | 익힘책 108쪽 | 익힘책 109쪽

1 어떤 백화점에서 계산을 하기 위해 기다리는 시간을 확률변수 X라고 하자. X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 물음에 답하여라.



(1) $f(2)$의 값을 구하여라.

(2) 기다리는 시간이 3분 이내일 확률을 구하여라.

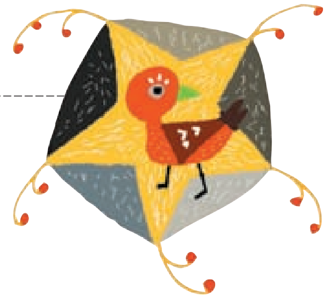
2 확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)=k\ (2\le x\le 6)$일 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 상수 k의 값을 구하여라.

(2) 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프를 그려라.

(3) $P(2.5\le X\le 4.5)$를 구하여라.

2 평균과 표준편차



학습 목표

- 이산확률변수의 기댓값(평균), 분산 및 표준편차를 구할 수 있다.
- 연속확률변수의 평균, 분산 및 표준편차를 구할 수 있다.
- 확률변수의 평균, 분산 및 표준편차의 성질을 이해한다.

다 가 서 기 / 기대되는 금메달

우리나라는 2008년 베이징 올림픽에서 금메달 13개, 은메달 10개, 동메달 8개로 총 31개의 메달을 획득하였다. 이것은 금메달의 개수가 1988년 서울 올림픽 이후부터 2004년 아테네 올림픽까지의 평균을 뛰어넘는 좋은 성적이다.

연도	개최지	금(개)	은(개)	동(개)	합계
1988	서울	12	10	11	33
1992	바르셀로나	12	5	12	29
1996	애틀랜타	7	15	5	27
2000	시드니	8	10	10	28
2004	아테네	9	12	9	30
합계		48	52	47	147
평균		9.6	10.4	9.4	29.4

01 이산확률변수의 평균과 표준편차

탐 구 하 기 / 최선의 선택

오른쪽 표는 세 가지의 동전 던지기 게임에 대한 상금을 적은 것이다. 이를테면 게임 1은 한 개의 동전을 던져서 앞면이 나오면 1000원을 받고, 뒷면이 나오면 1000원을 주는 것이다.

게임	앞면	뒷면
게임 1	+1000원	−1000원
게임 2	+5000원	−5000원
게임 3	+3000원	−2000원

세 가지의 게임 중 각자 하고 싶은 게임을 택하고, 택한 이유를 말하여 보자.

알 아 보 기 / 이산확률변수의 기댓값(평균), 분산 및 표준편차를 알아보자.

오른쪽 표와 같이 상금이 걸린 100장의 복권에서 상금의 평균은

상금(원)	복권 수(장)
10000	1
5000	5
1000	55
0	39
합계	100

$$\frac{10000\times1+5000\times5+1000\times55+0\times39}{100}$$

$$=900(\text{원}) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이다. 여기서 복권 1장에 대한 상금을 확률변수 X라고 할 때, ㉠의 좌변은 X의 각 값과 그에 대응하는 확률을 곱하여 더한 것과 같다. 즉

확률변수 X의 확률분포

X	$\mathrm{P}(X=x)$
10000	$\frac{1}{100}$
5000	$\frac{5}{100}$
1000	$\frac{55}{100}$
0	$\frac{39}{100}$
합계	1

$$10000\times\frac{1}{100}+5000\times\frac{5}{100}+1000\times\frac{55}{100}+0\times\frac{39}{100}=900(\text{원})$$

이때, 상금의 평균 900원은 복권을 1장 살 때 상금으로 기대할 수 있는 값이다.

일반적으로 확률변수 X의 확률분포가 다음 표와 같이 주어졌다고 하자.

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n	합계
$\mathrm{P}(X=x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$	p_n	1

이때, $x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$를 확률변수 X의 **기댓값** 또는 평균이라 하고, 기호로

$$\mathrm{E}(X)$$

와 같이 나타낸다.

기댓값 $\mathrm{E}(X)$의 E는 Expectation의 첫 글자이다.

혼동이 없을 때는 $\mathrm{E}(X)$를 간단히 m으로 쓴다. 이때, m은 mean의 첫 글자이다.

분산 $\mathrm{V}(X)$의 V는 Variance의 첫 글자이다.

$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i = \mathrm{E}(X^2)$

표준편차 σ(sigma)는 standard deviation의 첫 글자 s에 해당하는 그리스 문자이다.

도수분포에서 변량이 평균을 중심으로 흩어져 있는 정도를 나타내는 산포도로서 분산과 표준편차를 생각하였다. 마찬가지로 확률분포에서도 확률변수의 분산과 표준편차를 생각할 수 있다.

일반적으로 확률변수 X의 기댓값을 $\mathrm{E}(X)=m$이라고 하면 편차의 제곱 $(X-m)^2$은

$$(x_1-m)^2,\ (x_2-m)^2,\ \cdots,\ (x_n-m)^2$$

의 값을 가지는 확률변수로서, X가 m으로부터 떨어진 정도를 나타낸다.

이때, $(X-m)^2$의 기댓값을 확률변수 X의 분산이라 하고, 기호로

$$\mathrm{V}(X)$$

와 같이 나타낸다.

확률변수 X의 확률분포가

$$\mathrm{P}(X=x_i)=p_i\ (\text{단, } i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

일 때, 확률변수 X의 분산 $\mathrm{V}(X)$는

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}((X-m)^2)&=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2 p_i\\&=\sum_{i=1}^{n}x_i^2 p_i-2m\sum_{i=1}^{n}x_i p_i+m^2\sum_{i=1}^{n}p_i\\&=\sum_{i=1}^{n}x_i^2 p_i-2m^2+m^2\\&=\sum_{i=1}^{n}x_i^2 p_i-m^2=\mathrm{E}(X^2)-m^2\end{aligned}$$

과 같이 계산한다.

또 분산 $\mathrm{V}(X)$의 양의 제곱근을 확률변수 X의 표준편차라 하고, 기호로

$$\sigma(X)$$

와 같이 나타낸다. 즉

$$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

이산확률변수 X의 평균, 분산 및 표준편차

(1) 평균 $\quad \mathrm{E}(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i=m$

(2) 분산 $\quad \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}((X-m)^2)=\mathrm{E}(X^2)-m^2$

(3) 표준편차 $\quad \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$

함께하기 /

익힘책 111쪽 | 익힘책 112쪽 | 익힘책 113쪽

1 볼펜 6자루와 연필 4자루 중 임의로 2자루를 고를 때 나오는 연필의 개수를 확률변수 X라고 하자. X의 평균, 분산 및 표준편차를 구하여라.

풀이

확률변수 X가 가지는 값은 0, 1, 2이므로 각각의 확률을 구하면

$$P(X=0)=\frac{{}_6C_2\times{}_4C_0}{{}_{10}C_2}=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}$$

$$P(X=1)=\frac{{}_6C_1\times{}_4C_1}{{}_{10}C_2}=\frac{24}{45}=\frac{8}{15}$$

$$P(X=2)=\frac{{}_6C_0\times{}_4C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{6}{45}=\frac{2}{15}$$

확률변수 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$	1

확률변수 X의 평균 $E(X)$를 구하면

$$E(X)=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{2}{15}=\mathbf{\frac{4}{5}}$$

$E(X^2)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i$

한편 $E(X^2)=0^2\times\frac{1}{3}+1^2\times\frac{8}{15}+2^2\times\frac{2}{15}=\frac{16}{15}$이므로 확률변수 X의 분산 $V(X)$와 표준편차 $\sigma(X)$를 구하면

$$V(X)=E(X^2)-m^2=\frac{16}{15}-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\mathbf{\frac{32}{75}}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{32}{75}}=\mathbf{\frac{4\sqrt{6}}{15}}$$

스스로 하기 /

익힘책 111쪽 | 익힘책 112쪽 | 익힘책 113쪽

1 확률변수 X의 확률분포가 다음 표와 같을 때, X의 평균, 분산 및 표준편차를 구하여라.

X	-2	-1	0	1	2	합계
$P(X=x)$	0.1	0.2	0.35	0.3	0.05	1

2 세 개의 동전을 던져서 앞면이 나오는 개수를 확률변수 X라고 할 때, X의 평균, 분산 및 표준편차를 구하여라.

02 연속확률변수의 평균과 표준편차

알 아 보 기 / 연속확률변수의 평균, 분산 및 표준편차를 알아보자.

이산확률변수에서 쓰이는 $\sum$와 연속확률변수에서 쓰이는 $\int$은 같은 성질을 가지고 있다.

이산확률변수의 평균, 분산 및 표준편차의 개념을 연속확률변수에 적용하여 보자.

연속확률변수 X가 구간 $[\alpha, \beta]$의 모든 값을 가지고, 그 확률밀도함수가 $f(x)$일 때, X의 평균, 분산 및 표준편차를 다음과 같이 정의한다.

연속확률변수의 평균, 분산 및 표준편차

(1) 평균 $\mathrm{E}(X)=\int_{\alpha}^{\beta} x f(x)dx=m$

(2) 분산 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}((X-m)^2)=\int_{\alpha}^{\beta}(x-m)^2 f(x)dx$

$=\int_{\alpha}^{\beta}x^2 f(x)dx-m^2=\mathrm{E}(X^2)-m^2$

(3) 표준편차 $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$

| 보기 | 연속확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)=2x\ (0\le x\le 1)$일 때, X의 평균, 분산 및 표준편차는

$$\mathrm{E}(X)=\int_0^1 x\cdot 2x\,dx=\left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{3}$$

$$\mathrm{V}(X)=\int_0^1 x^2\cdot 2x\,dx-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\left[\frac{1}{2}x^4\right]_0^1-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{1}{18}}=\frac{\sqrt{2}}{6}$$

주어진 정의역 이외에서는 $f(x)=0$으로 생각한다.

스 스 로 하 기 /

익힘책 111쪽 | 익힘책 112쪽 | 익힘책 113쪽

1 연속확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)=3x^2\ (0\le x\le 1)$일 때, X의 평균, 분산 및 표준편차를 구하여라.

2 연속확률변수 X의 확률밀도함수가

$$f(x)=\begin{cases}1+x & (-1\le x\le 0)\\ 1-x & (0\le x\le 1)\end{cases}$$

일 때, X의 평균, 분산 및 표준편차를 구하여라.

$\mathrm{E}(X)=\int_{-1}^{0}x(1+x)dx$
$+\int_0^1 x(1-x)dx$

03 확률변수 $aX+b$의 평균과 표준편차

탐 구 하 기 / 확률변수 $X-1$과 $2X$

오른쪽 표는 한 개의 동전을 두 번 던지는 시행에서 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 할 때, X의 확률분포를 나타낸 것이다. 다음 물음에 답하여 보자.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

1. 오른쪽 표는 $Y=X-1$이라고 할 때, Y의 확률분포를 나타낸 것이다. 빈칸에 알맞은 것을 써넣어라.

Y	-1			합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	$\frac{1}{4}$			1

2. $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{E}(Y)$를 각각 구하고, 이들을 비교하여라.
3. 오른쪽 표는 $Z=2X$라고 할 때, Z의 확률분포를 나타낸 것이다. 빈칸에 알맞은 것을 써넣어라.

Z	0			합계
$\mathrm{P}(Z=z)$	$\frac{1}{4}$			1

4. $\mathrm{V}(X)$, $\mathrm{V}(Z)$를 각각 구하고, 이들을 비교하여라.

알 아 보 기 / 확률변수의 평균, 분산 및 표준편차의 성질을 알아보자.

확률변수 X의 확률분포가 다음 표와 같을 때, X의 일차식으로 표시된 확률변수 $Y=aX+b$ ($a\neq0$, b는 상수)를 생각하여 보자.

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	합계
$\mathrm{P}(X=x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

이때, $y_i=ax_i+b$라고 하면 $\mathrm{P}(Y=y_i)=\mathrm{P}(X=x_i)=p_i$이므로 확률변수 Y의 평균은

$$\mathrm{E}(Y)=\sum_{i=1}^{n}y_ip_i=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b)p_i$$

$$=a\sum_{i=1}^{n}x_ip_i+b\sum_{i=1}^{n}p_i=a\mathrm{E}(X)+b$$

이고, $\mathrm{E}(X)=m$이라고 하면 Y의 분산은

$$\mathrm{V}(Y)=\sum_{i=1}^{n}\{y_i-\mathrm{E}(Y)\}^2p_i=\sum_{i=1}^{n}\{(ax_i+b)-(am+b)\}^2p_i$$

$$=a^2\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i=a^2\mathrm{V}(X)$$

Σ와 $\int$의 성질이 같음을 이용하면 연속확률변수에서도 이와 같은 성질이 성립함을 밝힐 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

$\sigma(aX+b)=\sqrt{\mathrm{V}(aX+b)}$
$=\sqrt{a^2\mathrm{V}(X)}$
$=|a|\sigma(X)$

확률변수 $aX+b$의 평균, 분산 및 표준편차

확률변수 $aX+b$ ($a\neq0$, b는 상수)에 대하여

(1) 평균 $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$

(2) 분산 $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$

(3) 표준편차 $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

| 보기 | 확률변수 X의 평균을 m, 표준편차를 σ라고 할 때, $Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$의 평균 $\mathrm{E}(Z)$와 분산 $\mathrm{V}(Z)$를 구하면

$$\mathrm{E}(Z)=\mathrm{E}\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)=\mathrm{E}\left(\frac{1}{\sigma}X-\frac{m}{\sigma}\right)$$
$$=\frac{1}{\sigma}\mathrm{E}(X)-\frac{m}{\sigma}=\frac{m}{\sigma}-\frac{m}{\sigma}=0$$
$$\mathrm{V}(Z)=\mathrm{V}\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)=\mathrm{V}\left(\frac{1}{\sigma}X-\frac{m}{\sigma}\right)$$
$$=\frac{1}{\sigma^2}\mathrm{V}(X)=\frac{1}{\sigma^2}\cdot\sigma^2=1$$

스스로 하기 /

익힘책 111쪽 | 익힘책 112쪽 | 익힘책 113쪽

1 $\mathrm{E}(X)=50$, $\mathrm{V}(X)=25$일 때, 다음 확률변수의 평균, 분산 및 표준편차를 구하여라.

(1) $X+10$ (2) $5X+10$

2 평균이 m, 표준편차가 σ인 시험의 원점수 X를 다음과 같이 T 점수로 바꿀 때, 물음에 답하여라.

$$T=10\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)+50$$

(1) T 점수의 평균과 표준편차를 구하여라.

(2) 오른쪽 표는 어느 학교 학생들의 국어 시험과 수학 시험의 평균 및 표준편차이다. 이 시험에서 영주의 국어 점수와 수학 점수는 모두 72점이었다. 영주의 국어 점수와 수학 점수에 대한 T 점수를 구하고 이를 비교하여라.

	평균	표준편차
국어	60	10
수학	40	16

공 학 도 구

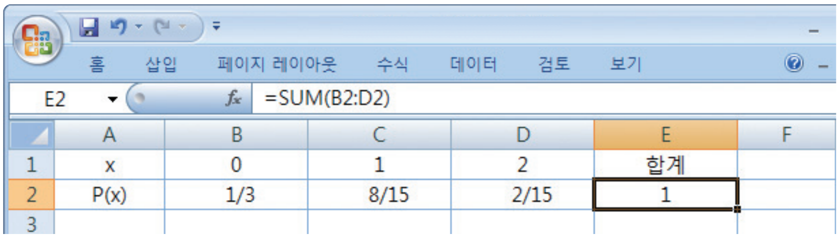
컴퓨터 프로그램을 이용하여 이산확률변수의 평균, 분산 및 표준편차 구하기

컴퓨터 프로그램을 이용하여 134쪽의 함께하기 **1**에 주어진 확률변수의 평균, 분산 및 표준편차를 다음과 같이 구할 수 있다.

1. 확률분포를 입력하여 보자.

❶ A1 셀에 'x' 를 입력하고 B1, C1, D1 셀에 확률변수 X가 가지는 값을 각각 입력한다. 또 E1 셀에 '합계' 를 입력한다.

❷ A2 셀에 확률변수 'P(x)' 를 입력하고 B2, C2, D2 셀에 각각의 확률을 입력한다. 또 마우스 끌기를 하여 B2~D2 셀을 선택한 후 수식 메뉴의 자동합계($\sum$) 아이콘을 클릭하면 E2 셀에 SUM(B2:D2), 즉 B2 셀부터 D2 셀까지의 합이 계산된다.



	A	B	C	D	E	F
1	x	0	1	2	합계	
2	P(x)	1/3	8/15	2/15	1	
3						

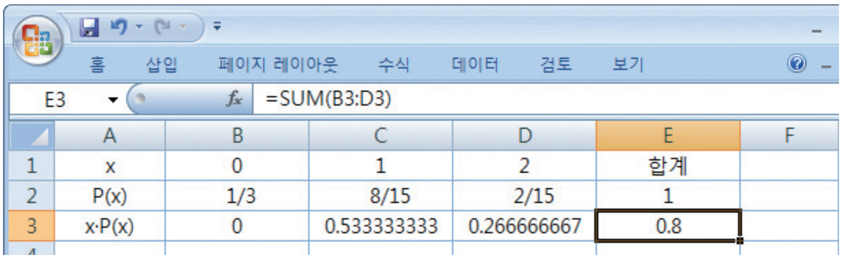
2. 평균을 계산하여 보자.

❶ A3 셀에 'x·P(x)' 를 입력한다.

❷ B3 셀에 '=B1 * B2' 를 입력하고 Enter 키를 누른다.

❸ B3 셀의 오른쪽 끝에 커서를 놓으면 커서가 십자(+)표시로 바뀐다. 이때, 마우스 끌기를 하여 D3 셀까지 선택하면 C3, D3 셀에 자동으로 나머지 '=C1 * C2', '=D1 * D2' 가 각각 입력된다.

❹ 마우스 끌기를 하여 B3~D3 셀을 선택한 후 자동합계($\sum$) 아이콘을 클릭한다. 이렇게 하면 E3 셀에 SUM(B3:D3), 즉 E(X)의 값이 계산된다.



	A	B	C	D	E	F
1	x	0	1	2	합계	
2	P(x)	1/3	8/15	2/15	1	
3	x·P(x)	0	0.533333333	0.266666667	0.8	

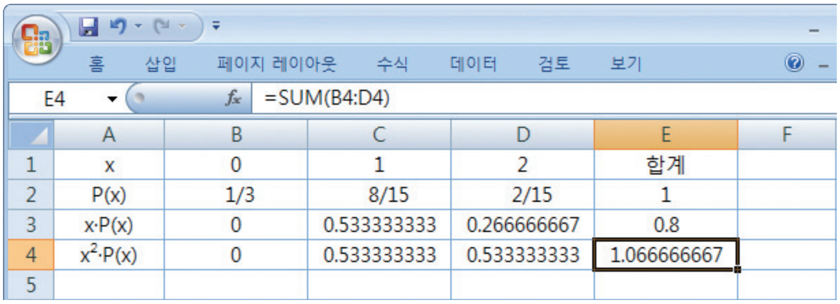
3. 분산과 표준편차를 계산하여 보자.

❶ A4 셀에 '$x^2 \cdot \mathrm{P}(x)$' 를 입력한다.

❷ B4 셀에 '=B1^2 * B2' 를 입력한 뒤 Enter 키를 누른다.

❸ B4 셀의 오른쪽 끝에 커서를 놓으면 커서가 십자(+)표시로 바뀌면 D4 셀까지 마우스 끌기를 하여 나머지 셀의 값을 구한다.

❹ 마우스 끌기를 하여 B4~D4 셀을 선택한 후 자동합계($\sum$)아이콘을 클릭한다. 이렇게 하면 E4 셀에 SUM(B4:D4), 즉 $\mathrm{E}(X^2)$의 값이 계산된다.

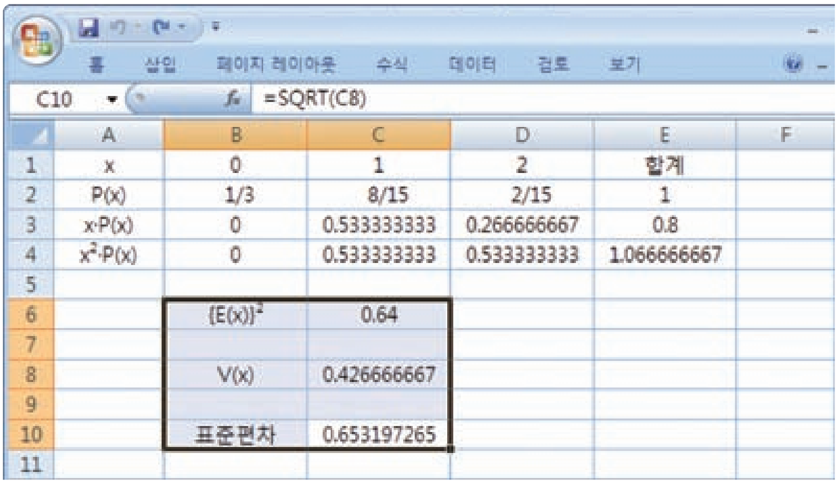


	A	B	C	D	E	F
1	x	0	1	2	합계	
2	P(x)	1/3	8/15	2/15	1	
3	x·P(x)	0	0.533333333	0.266666667	0.8	
4	x^2·P(x)	0	0.533333333	0.533333333	1.066666667	
5						

❺ B6 셀에 '$\{\mathrm{E}(X)\}^2$' 을 입력하고, C6 셀에 '=E3^2' 를 입력한다.

❻ B8 셀에 '$\mathrm{V}(X)$' 를 입력하고, C8 셀에 '=E4−C6' 을 입력한다. 이렇게 하면 C8 셀에 $\mathrm{V}(X)$의 값이 계산된다.

❼ B10 셀에 '표준편차' 를 입력하고, C10 셀에 '=SQRT(C8)' 을 입력한다. 이렇게 하면 C10 셀에 표준편차의 값이 계산된다.



	A	B	C	D	E	F
1	x	0	1	2	합계	
2	P(x)	1/3	8/15	2/15	1	
3	x·P(x)	0	0.533333333	0.266666667	0.8	
4	x^2·P(x)	0	0.533333333	0.533333333	1.066666667	
5						
6		$\{\mathrm{E}(x)\}^2$	0.64			
7						
8		V(x)	0.426666667			
9						
10		표준편차	0.653197265			
11						

3 이항분포

학습 목표

- 이항분포의 뜻을 안다.
- 이항분포의 평균과 표준편차를 구할 수 있다.
- 이항분포의 분포표와 그래프를 이해한다.
- 큰 수의 법칙을 이해한다.

다 가 서 기 / **항공권 예약**

항공사에서는 예약한 사람이 사전 통보 없이 탑승하지 않는 경우에 대비하여 적절한 인원만큼 초과하여 항공권을 팔기도 한다. 이때에 적용되는 모형이 이 단원에서 다루는 이항분포이다.

손님을 좌석의 수보다 적게 탑승시키면 손실이 생기고, 손님을 좌석의 수보다 많게 탑승시키면 좌석이 부족하므로 항공사에서는 항상 적절한 수학 모형을 사용하여 항공권 예약을 받는다.

01 이항분포의 뜻

탐 구 하 기 / 주사위를 네 번 던질 때 나오는 눈의 수의 관찰

한 개의 주사위를 네 번 던지는 시행에서 1의 눈이 나오면 ○표, 그 외의 눈이 나오면 ×표를 할 때, 다음 표를 완성하여 보자.

네 번의 시행에서 1의 눈이 나오는 횟수				
0번	1번	2번	3번	4번
××××	×××○	××○○	×○○○	○○○○
	××○×	×○×○	○×○○	
	×○××	×○○×	○○×○	
	○×××	○××○		

알 아 보 기 / 이항분포의 뜻을 알아보자.

1의 눈이 1번 나오는 경우

1회	2회	3회	4회
×	×	×	○
×	×	○	×
×	○	×	×
○	×	×	×

확률: ${}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{4-1}$

한 개의 주사위를 네 번 던지는 시행에서 1의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하면 독립시행의 확률에 의하여 다음이 성립한다.

$$\mathrm{P}(X=x)={}_4\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{6}\right)^x\left(\frac{5}{6}\right)^{4-x}\ (\text{단, } x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

일반적으로 한 번의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p일 때, n번의 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 X라고 하면 X는 0, 1, 2, ⋯, n의 값을 가지는 이산확률변수이고, X의 확률분포는 다음과 같다.

$$\mathrm{P}(X=x)={}_n\mathrm{C}_x\,p^x(1-p)^{n-x}\ (\text{단, } x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

이때, $q=1-p$라고 하면 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	0	1	2	⋯	x	⋯	n	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	${}_n\mathrm{C}_0\,q^n$	${}_n\mathrm{C}_1\,pq^{n-1}$	${}_n\mathrm{C}_2\,p^2q^{n-2}$	⋯	${}_n\mathrm{C}_x\,p^xq^{n-x}$	⋯	${}_n\mathrm{C}_n\,p^n$	1

$\sum_{x=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_x p^x q^{n-x}=(q+p)^n=1$

이 표에서 각 확률은 이항정리에 의하여 $(q+p)^n$을 전개한 다음 식의 우변의 각 항과 같다.

$$(q+p)^n={}_n\mathrm{C}_0\,q^n+{}_n\mathrm{C}_1\,pq^{n-1}+\cdots+{}_n\mathrm{C}_x\,p^xq^{n-x}+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\,p^n$$

이와 같은 확률분포를 **이항분포**라 하고, 기호로

$$\mathrm{B}(n,\ p)$$

와 같이 나타낸다.

이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$에서 B는 Binomial distribution의 첫 글자이다.

주사위를 한 번 던질 때 1의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$이다.

$\mathrm{P}(X=x)={}_3\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{6}\right)^x\left(\frac{5}{6}\right)^{3-x}$
$(x=0,\ 1,\ 2,\ 3)$

| 보기 | 한 개의 주사위를 세 번 던질 때, 1의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하면 X의 확률분포는 이항분포 $\mathrm{B}\left(3,\ \frac{1}{6}\right)$이다.

이 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{25}{72}$	$\frac{5}{72}$	$\frac{1}{216}$	1

함 께 하 기 /

익힘책 115쪽 | 익힘책 116쪽 | 익힘책 117쪽

1 어느 항공 노선을 예약한 사람이 사전 통보 없이 탑승하지 않는 경우가 20명 중 1명 꼴이라고 한다. 좌석 수 80에 대하여 82명이 좌석을 예약한 경우 좌석이 부족하게 될 확률을 구하여라.

(단, $0.95^{81}=0.0157$, $0.95^{82}=0.0149$로 한다.)

| 풀이 |

예약한 사람이 탑승할 확률은 0.95이다. 그러므로 예약한 82명 중에서 탑승하는 사람의 수를 확률변수 X라고 하면 X의 확률분포는 이항분포 $\mathrm{B}(82,\ 0.95)$이다. 즉

$$\mathrm{P}(X=x)={}_{82}\mathrm{C}_x\cdot 0.95^x\cdot 0.05^{82-x}\ (\text{단, } x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 82)$$

한편 좌석이 부족하게 되는 것은 $X\geq 81$인 경우이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\geq 81)&=\mathrm{P}(X=81)+\mathrm{P}(X=82)\\&={}_{82}\mathrm{C}_{81}\cdot 0.95^{81}\cdot 0.05+{}_{82}\mathrm{C}_{82}\cdot 0.95^{82}\\&=82\times 0.0157\times 0.05+1\times 0.0149=\mathbf{0.07927}\end{aligned}$$

스 스 로 하 기 /

익힘책 115쪽 | 익힘책 116쪽 | 익힘책 117쪽

1 다음 이항분포의 확률분포를 식과 표로 나타내어라.

(1) $\mathrm{B}\left(4,\ \frac{1}{2}\right)$ (2) $\mathrm{B}(5,\ 0.2)$

2 어떤 소극장의 공연을 예약한 사람 중 사전 통보 없이 오지 않는 사람이 10 %라고 한다. 좌석 수 60에 대하여 62명이 좌석을 예약한 경우 좌석이 부족하게 될 확률을 구하여라.

(단, $0.9^{61}=0.0016$, $0.9^{62}=0.0015$로 한다.)

02 이항분포의 평균과 표준편차

알 아 보 기 / 이항분포의 평균, 분산 및 표준편차를 구하여 보자.

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(3,\ p)$를 따를 때, 그 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다. (단, $q=1-p$)

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	q^3	$3pq^2$	$3p^2q$	p^3	1

여기서 평균 $\mathrm{E}(X)$와 분산 $\mathrm{V}(X)$를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=0\times q^3+1\times 3pq^2+2\times 3p^2q+3\times p^3\\&=3pq^2+6p^2q+3p^3=3p(q+p)^2=3p\end{aligned}$$

$q=1-p$이므로 $q+p=1$

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=0^2\times q^3+1^2\times 3pq^2+2^2\times 3p^2q+3^2\times p^3-(3p)^2\\&=3p(q^2+4pq+3p^2-3p)\\&=3p\{(q+p)(q+3p)-3p\}=3pq\end{aligned}$$

일반적으로 이항분포의 평균, 분산 및 표준편차는 다음과 같다.

이항분포의 평균, 분산 및 표준편차

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르면

$$\mathrm{E}(X)=np,\ \mathrm{V}(X)=npq,\ \sigma(X)=\sqrt{npq}\ \ (\text{단, } q=1-p)$$

| 보기 | 한 개의 주사위를 18번 던질 때, 1 또는 6의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(18,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=18\cdot\frac{1}{3}=6,\ \mathrm{V}(X)=18\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=4,\ \sigma(X)=2$$

주사위를 한 번 던질 때 1 또는 6의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이다.

스 스 로 하 기 / 익힘책 115쪽 | 익힘책 116쪽 | 익힘책 117쪽

1 다음 이항분포의 평균, 분산 및 표준편차를 구하여라.

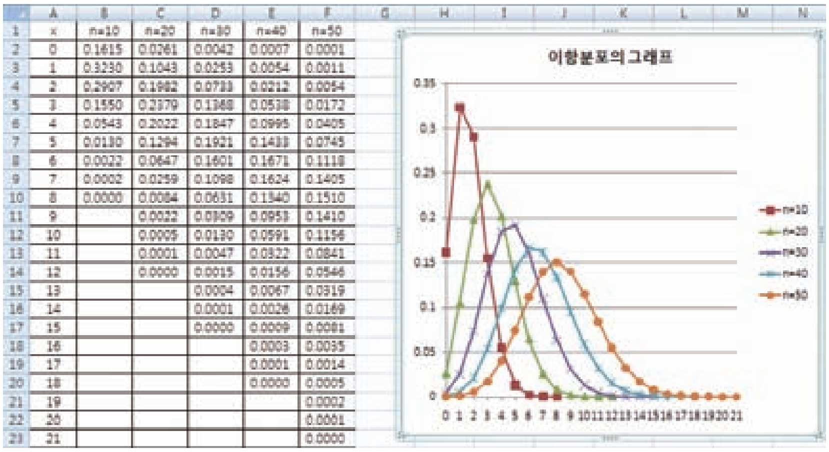
(1) $\mathrm{B}\left(64,\ \frac{1}{2}\right)$ (2) $\mathrm{B}\left(400,\ \frac{1}{5}\right)$

2 한 개의 주사위를 36번 던져서 짝수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 할 때, X의 평균, 분산 및 표준편차를 구하여라.

03 이항분포의 분포표와 그래프

알 아 보 기 / 이항분포의 분포표와 그래프에 대하여 알아보자.

이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$에서 $p=\dfrac{1}{6}$에 대하여 $n=10,\ 20,\ 30,\ 40,\ 50$일 때, 확률분포의 표와 그래프는 다음과 같다.



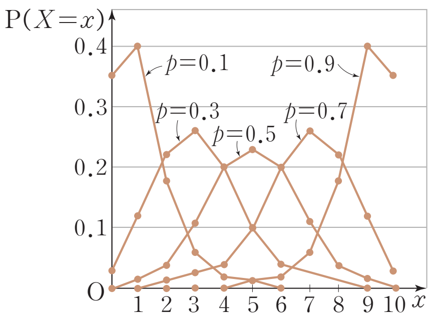
x	n=10	n=20	n=30	n=40	n=50
0	0.1615	0.0261	0.0042	0.0007	0.0001
1	0.3230	0.1043	0.0253	0.0054	0.0011
2	0.2907	0.1982	0.0733	0.0212	0.0054
3	0.1550	0.2379	0.1368	0.0538	0.0172
4	0.0543	0.2022	0.1847	0.0995	0.0405
5	0.0130	0.1294	0.1921	0.1433	0.0745
6	0.0022	0.0647	0.1601	0.1671	0.1118
7	0.0002	0.0259	0.1098	0.1624	0.1405
8	0.0000	0.0084	0.0631	0.1540	0.1510
9		0.0022	0.0309	0.0953	0.1410
10		0.0005	0.0130	0.0591	0.1156
11		0.0001	0.0047	0.0322	0.0841
12		0.0000	0.0015	0.0156	0.0546
13			0.0004	0.0067	0.0319
14			0.0001	0.0026	0.0169
15			0.0000	0.0009	0.0081
16				0.0003	0.0035
17				0.0001	0.0014
18				0.0000	0.0005
19					0.0002
20					0.0001
21					0.0000

| 그림1 |

다음에 배울 이항분포와 정규분포의 관계에서도 이 성질을 활용한다.

| 그림1 | 에서와 같이 p를 일정하게 하고 n을 크게 하면 이항분포의 그래프는 점차 좌우 대칭인 모양에 가까워진다.

또 | 그림2 | 에서와 같이 n을 일정하게 하고 p를 0.5에 가깝게 하여도 이항분포의 그래프는 좌우 대칭인 모양에 가까워지는 것을 알 수 있다.



| 그림2 |

스 스 로 하 기 / 익힘책 115쪽 | 익힘책 116쪽 | 익힘책 117쪽

1 한 개의 주사위를 40번 던질 때, 1의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하자. | 그림1 | 의 표를 이용하여 다음을 구하여라.

(1) $\mathrm{P}(X \le 2)$ (2) $\mathrm{P}(7 \le X \le 9)$ (3) $\mathrm{P}(X \ge 15)$

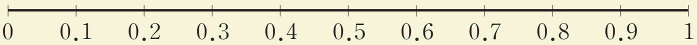
04 큰 수의 법칙

탐 구 하 기 / 동전 던지기

동전 한 개를 던질 때, 앞면이 나올 수학적 확률은 $\frac{1}{2}$이다. 다음과 같은 활동을 통하여 통계적 확률과 수학적 확률의 관계를 알아보자.

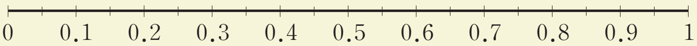
1. 동전 10개를 동시에 던지는 시행을 10회 반복하여 각 시행에서 앞면이 나오는 상대도수를 | 그림 1 |에 각각 점으로 표시하여라.

| 그림 1 |



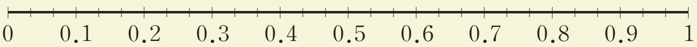
2. 동전 20개를 동시에 던지는 시행을 10회 반복하여 각 시행에서 앞면이 나오는 상대도수를 | 그림 2 |에 각각 점으로 표시하여라.

| 그림 2 |



3. 동전 30개를 동시에 던지는 시행을 10회 반복하여 각 시행에서 앞면이 나오는 상대도수를 | 그림 3 |에 각각 점으로 표시하여라.

| 그림 3 |



4. 위의 각 그림에 표시된 10개의 점의 분포 상태를 비교하여라.

알 아 보 기 / 큰 수의 법칙을 알아보자.

한 개의 주사위를 한 번 던질 때 1의 눈이 나올 확률이 $\frac{1}{6}$이라는 것은 실제로 6번 던지면 1의 눈이 꼭 1번 나온다는 뜻이 아니다.

다음 예를 통하여 통계적 확률과 수학적 확률의 관계를 알아보자.

한 개의 주사위를 n번 던져서 1의 눈이 나오는 횟수를 X라고 할 때, $n=10,\ 30,\ 40$의 각각에 대하여

$$\left|\frac{X}{n}-\frac{1}{6}\right|<0.1,\ \text{즉}\ \frac{1}{6}-0.1<\frac{X}{n}<\frac{1}{6}+0.1$$

이 성립할 확률을 구하여 보자.

$\left|\frac{X}{n}-\frac{1}{6}\right|<0.1$

$\Longleftrightarrow -0.1<\frac{X}{n}-\frac{1}{6}<0.1$

144쪽의 이항분포표를 이용한다.

(ⅰ) $n=10$일 때, $0.66\cdots<X<2.66\cdots$이므로

$$\begin{aligned}P(0.66\cdots<X<2.66\cdots)&=P(X=1)+P(X=2)\\&=0.3230+0.2907=0.6137\end{aligned}$$

(ⅱ) $n=30$일 때, $2<X<8$이므로

$$\begin{aligned}P(2<X<8)&=P(X=3)+P(X=4)+\cdots+P(X=7)\\&=0.1368+0.1847+\cdots+0.1098=0.7835\end{aligned}$$

(ⅲ) $n=40$일 때, $2.66\cdots<X<10.66\cdots$이므로

$$\begin{aligned}&P(2.66\cdots<X<10.66\cdots)\\&=P(X=3)+P(X=4)+\cdots+P(X=10)\\&=0.0538+0.0995+\cdots+0.0591=0.9145\end{aligned}$$

위의 결과에서 1의 눈이 나오는 상대도수 $\dfrac{X}{n}$와 수학적 확률 $\dfrac{1}{6}$의 차가 0.1보다 작을 확률은 시행 횟수 n이 커질수록 1에 가까워짐을 짐작할 수 있다. 즉, 상대도수와 수학적 확률과의 차가 0.1보다 작게 되는 일은 시행 횟수 n을 크게 함에 따라 그 확실성이 커진다. 이 사실은 0.1을 0.01, 0.001, 0.0001, …로 바꾸어도 마찬가지로 성립한다.

일반적으로 다음과 같은 **큰 수의 법칙**이 성립한다.

큰 수의 법칙

어떤 한 시행에서 사건 A가 일어날 수학적 확률이 p일 때, n번의 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 X라고 하면 아무리 작은 양수 h를 택하더라도 다음이 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|<h\right)=1$$

자연 현상이나 사회 현상과 같이 수학적 확률을 구하기 곤란할 때에는 통계적 확률을 대신 사용한다.

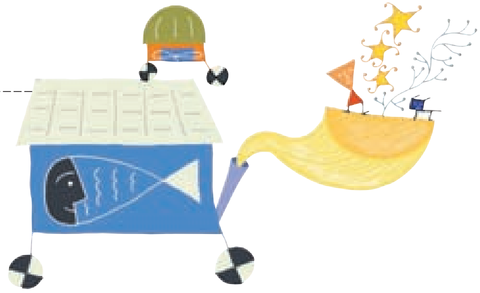
큰 수의 법칙에 의하면 시행 횟수 n을 충분히 크게 하였을 때, 상대도수 $\dfrac{X}{n}$의 값은 수학적 확률 p와 같아짐을 알 수 있다.

스스로 하기 /

익힘책 115쪽 | 익힘책 116쪽 | 익힘책 117쪽

1 알아보기에서 $n=50$일 때, 주어진 조건이 성립할 확률을 구하여라.

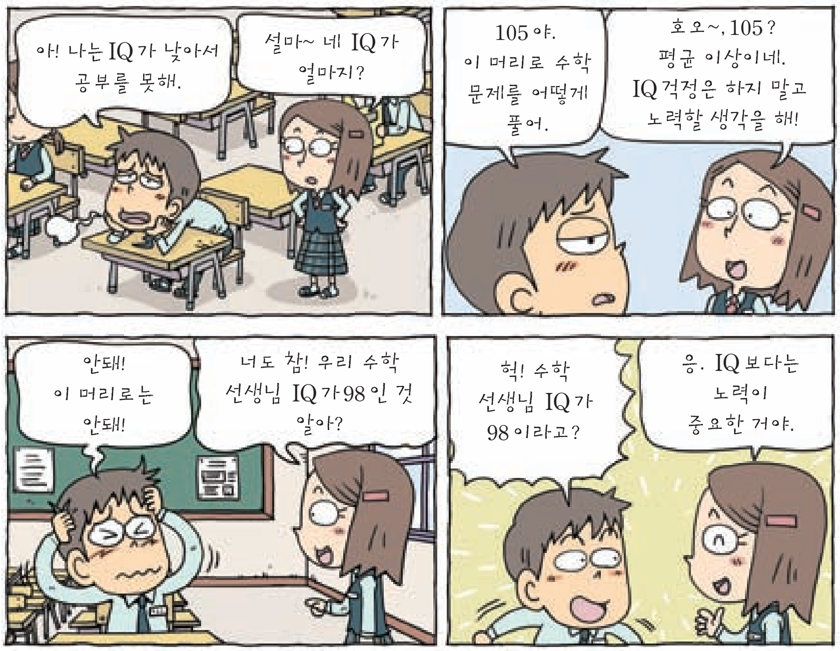
4 정규분포



학습 목표

- 정규분포의 뜻을 안다.
- 정규분포곡선의 성질을 이해한다.
- 표준정규분포의 뜻을 알고, 활용할 수 있다.
- 이항분포와 정규분포의 관계를 이해한다.

다 가 서 기 / **성공의 99 %는 노력의 결과**



지능지수(IQ)는 지능검사의 결과로 지능의 정도를 총괄하여 하나의 수치로 나타낸 것이다. 이때, 지능지수는 평균(m)이 100이고 표준편차(σ)가 15인 정규분포를 따르도록 한다. 즉, 지능지수가 85~115이면 평균으로부터 1시그마(σ) 안의 범위에 있는 보통의 지능지수이다.

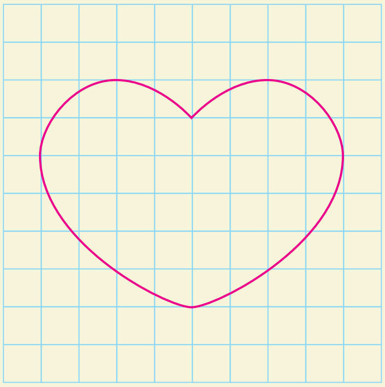
세상에는 분명 천부적인 재능을 타고난 사람이 있다. 그러나 그들도 모든 면에서 뛰어난 것은 아니다. 어떤 면에서 뛰어난 사람은 자기의 부족한 면을 찾을 줄 알아야 하고, 어떤 면에서 부족한 사람은 자기의 뛰어난 점을 찾을 줄 알아야 한다.

에디슨은 "성공은 1 %의 영감과 99 %의 노력의 결과이다."라고 말하였다.

01 정규분포의 뜻과 정규분포곡선의 성질

탐 구 하 기 / 측정값의 분포

오른쪽 그림의 곡선에 대하여 다음을 알아보자.



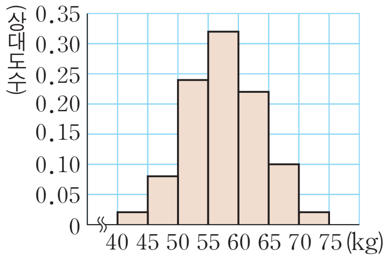
1. 곡선의 길이를 구하는 여러 가지 방법을 생각하고, 또 실제로 구하여라.
2. 우리 반 학생들이 물음 1에서 구한 곡선의 길이에 대하여 상대도수의 분포표를 만들어라.
3. 상대도수의 분포표를 히스토그램으로 나타내고, 히스토그램에서 각 직사각형의 윗변의 중점을 곡선으로 연결하여라.
4. 물음 3에서 그린 곡선에 대하여 그 특징을 말하여라.

알 아 보 기 / 정규분포의 뜻과 성질을 알아보자.

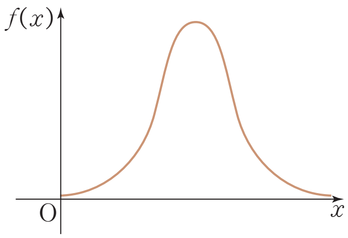
오른쪽 **|그림1|** 은 어느 고등학교 학생 50명의 몸무게를 조사한 자료에 대한 상대도수의 분포표를 히스토그램으로 나타낸 것이다.

여기서 자료의 수를 충분히 크게 하고 계급의 크기를 작게 하면 히스토그램은 오른쪽 **|그림2|** 와 같은 곡선에 가까워진다.

이와 같이 자연 현상이나 사회 현상을 측정할 때, 그 확률밀도함수의 그래프가 **|그림2|** 와 같은 종 모양의 곡선에 가까운 경우가 많이 있다. 이러한 분포의 곡선을 정규분포곡선이라고 한다.



|그림1|



|그림2|

연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가 다음 식과 같을 때, X는 **정규분포**를 따른다고 한다.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{단, } -\infty<x<\infty)$$

여기서 m과 σ ($\sigma>0$)는 각각 평균과 표준편차를 나타내는 상수이며, e는 그 값이 $2.71828\cdots$인 무리수이다.

평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 기호로

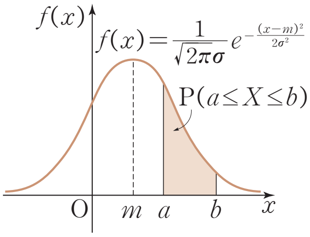
$$\mathbf{N}(m,\ \sigma^2)$$

과 같이 나타낸다.

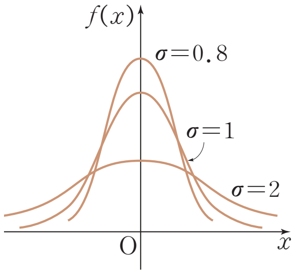
정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$에서 N은 Normal distribution의 첫 글자이다.

확률변수 X가 정규분포를 따를 때, 정규분포곡선과 x축 사이의 넓이는 1이다.

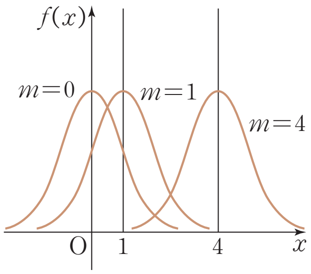
또 X의 값이 구간 $[a,\ b]$에 있을 확률 $\mathrm{P}(a\le X\le b)$는 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이이다.



한편 정규분포곡선은 m과 σ의 값에 따라 그 모양이 정해진다.



$m=0$이고 σ가 변할 때



$\sigma=1$이고 m이 변할 때

일반적으로 여러 가지 정규분포곡선에서 다음의 성질을 알 수 있다.

정규분포곡선의 성질

(1) 직선 $x=m$에 대하여 대칭인 종 모양의 곡선이고 점근선은 x축이다.

(2) 곡선과 x축 사이의 넓이는 1이다.

(3) $x=m$일 때, 최댓값 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$을 가진다.

(4) m이 일정할 때, 표준편차 σ가 커지면 곡선은 양쪽으로 퍼지고 σ가 작아지면 곡선은 뾰족하게 된다.

(5) σ가 일정할 때, m이 변하면 대칭축의 위치는 바뀌지만 곡선의 모양은 같다.

02 표준정규분포

알 아 보 기 / 표준정규분포의 뜻을 알아보자.

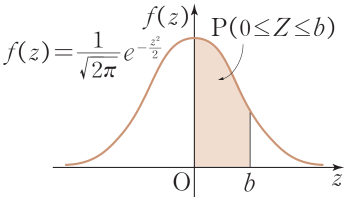
평균이 0, 표준편차가 1인 정규분포를 **표준정규분포**라 하고, 기호로

$$\mathrm{N}(0,\ 1)$$

과 같이 나타낸다.

확률변수 Z가 표준정규분포를 따르면 Z의 확률밀도함수는 다음과 같다.

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\ (\text{단}, -\infty<z<\infty)$$



이때, $\mathrm{P}(0\le Z\le b)$는 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이와 같으며, 그 값은 부록의 표준정규분포표에 주어져 있다. 이를테면

$\mathrm{P}(0\le Z\le 1.96)=0.4750$

$\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$

z	0	1	5	6	7
0.0	.0000	.0040	.0199	.0239	.0279
0.1	.0398	.0438	.0596	.0636	.0675
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.9	.4713	.4719	.4744	.4750	.4756
2.0	.4772	.4778	.4798	.4803	.4808

표준정규분포표는 임의의 b에 대하여 $\mathrm{P}(0\le Z\le b)$의 값을 나타낸다.

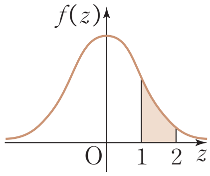
| 보기 | 확률변수 Z가 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따를 때

(1) $\mathrm{P}(1\le Z\le 2)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=0.4772-0.3413$

$=0.1359$

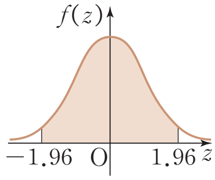


(2) $\mathrm{P}(|Z|\le 1.96)$

$=\mathrm{P}(-1.96\le Z\le 1.96)$

$=2\times\mathrm{P}(0\le Z\le 1.96)$

$=2\times 0.4750=0.95$



스 스 로 하 기 / 익힘책 119쪽 | 익힘책 120쪽 | 익힘책 122쪽

1 확률변수 Z가 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따를 때, 표준정규분포표를 이용하여 다음 확률을 구하여라.

(1) $\mathrm{P}(Z\le 2)$ (2) $\mathrm{P}(|Z|\le 2.58)$

(3) $\mathrm{P}(Z\le -1)$ (4) $\mathrm{P}(Z\ge -1.96)$

$\mathrm{P}(Z\le -a)=\mathrm{P}(Z\ge a)$

03 표준화

알 아 보 기 / 표준화의 뜻을 알아보고, 이를 활용하여 보자.

$\mathrm{E}(Z)=\mathrm{E}\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)$
$=\frac{1}{\sigma}\mathrm{E}(X)-\frac{m}{\sigma}=0$
$\mathrm{V}(Z)=\mathrm{V}\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)$
$=\frac{1}{\sigma^2}\mathrm{V}(X)=1$

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따를 때, 확률변수 Z를

$$Z=\frac{X-m}{\sigma}$$

이라고 하면 Z의 평균과 분산은 각각 $\mathrm{E}(Z)=0$, $\mathrm{V}(Z)=1$이다. 즉, 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

이와 같이 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X를 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르는 확률변수 Z로 바꾸는 것을 확률변수 X의 **표준화**라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$에 대한 분포표가 주어져 있지 않으므로 표준화하여 확률을 구한다.

정규분포의 표준화

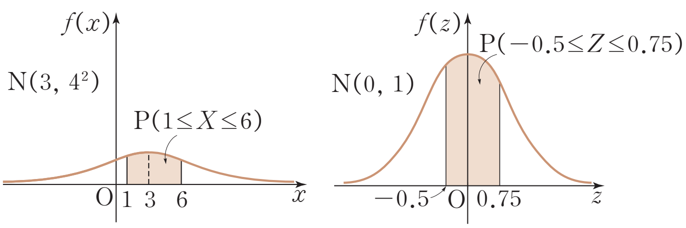
확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따를 때, 확률변수 Z를

$$Z=\frac{X-m}{\sigma}$$

이라고 하면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

| 보기 | 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(3,\ 4^2)$을 따를 때, $Z=\frac{X-3}{4}$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$1\le X\le 6 \Longleftrightarrow \frac{1-3}{4}\le\frac{X-3}{4}\le\frac{6-3}{4}$$
$$\Longleftrightarrow -0.5\le Z\le 0.75$$



$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(1\le X\le 6)&=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le 0.75)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le 0.75)\\&=0.1915+0.2734\\&=0.4649\end{aligned}$$

함께하기 /

익힘책 119쪽 | 익힘책 120쪽 | 익힘책 122쪽

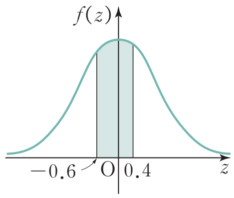
1 어떤 종류의 음료수 캔 300개 각각에 들어 있는 내용물의 용량은 평균이 190 mL, 표준편차가 5 mL인 정규분포를 따른다고 한다. 다음 물음에 답하여라.

(1) 용량이 187 mL 이상 192 mL 이하인 캔은 전체의 약 몇 %인가?

(2) 용량이 193 mL 이상인 캔은 약 몇 개인가?

풀이

캔에 들어 있는 내용물의 용량을 확률변수 X (mL)라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(190,\ 5^2)$을 따른다. 여기서 $Z=\dfrac{X-190}{5}$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.



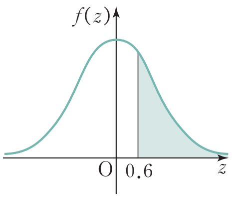
(1) $\mathrm{P}(187\le X\le 192)=\mathrm{P}(-0.6\le Z\le 0.4)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 0.6)+\mathrm{P}(0\le Z\le 0.4)$

$=0.2257+0.1554$

$=0.3811$

따라서 용량이 187 mL 이상 192 mL 이하인 캔은 전체의 **약 38 %**이다.



(2) $\mathrm{P}(X\ge 193)=\mathrm{P}(Z\ge 0.6)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.6)$

$=0.5-0.2257$

$=0.2743$

이때, $300\times 0.2743=82.29$이므로 용량이 193 mL 이상인 캔의 개수는 **약 82개**이다.

스스로 하기 /

익힘책 119쪽 | 익힘책 120쪽 | 익힘책 122쪽

1 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 10^2)$을 따를 때, 다음을 구하여라.

(1) $\mathrm{P}(X\ge 50)$　　(2) $\mathrm{P}(60\le X\le 75)$

(3) $\mathrm{P}(45\le X\le 65)$　　(4) $\mathrm{P}(X<55)$

2 어느 학교 학생 150명의 수학 성적은 평균이 60점, 표준편차가 10점인 정규분포를 따른다고 한다. 다음 물음에 답하여라.

(1) 성적이 52점 이상 70점 이하인 학생은 전체의 약 몇 %인가?

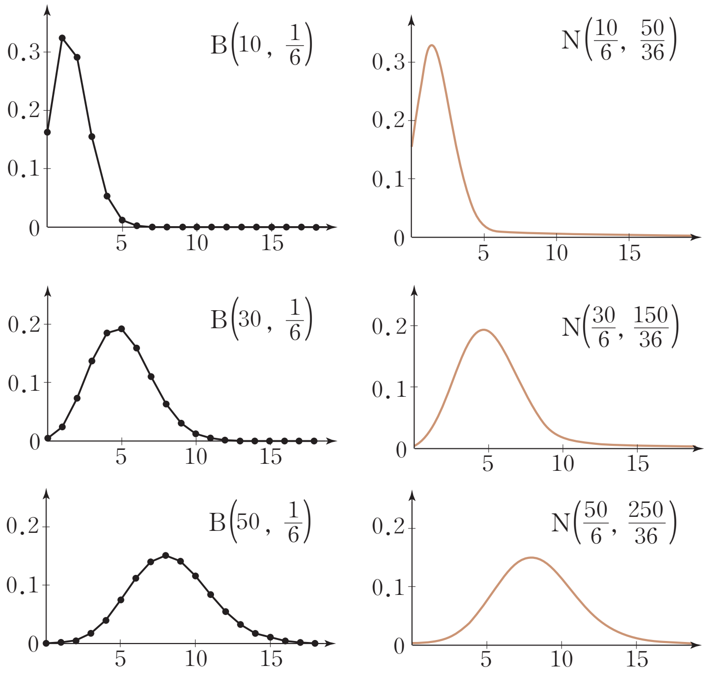
(2) 성적이 80점 이상인 학생은 약 몇 명인가?

04 이항분포와 정규분포의 관계

알 아 보 기 / 이항분포와 정규분포 사이의 관계를 알아보자.

한 개의 주사위를 n번 던져서 1의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \dfrac{1}{6}\right)$을 따른다. 이때, X의 평균 $np=\dfrac{n}{6}$이고 분산 $npq=\dfrac{5n}{36}$이다.

여기서 $n=10,\ 30,\ 50$일 때의 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \dfrac{1}{6}\right)$의 그래프는 다음 그림과 같이 정규분포 $\mathrm{N}\left(\dfrac{n}{6}, \dfrac{5n}{36}\right)$에 가까워짐을 짐작할 수 있다.



일반적으로 이항분포의 그래프는 시행 횟수 n이 커질 때 정규분포곡선에 가까워진다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

n이 $np \geq 5$ 또는 $nq \geq 5$를 만족할 때, n을 충분히 큰 값으로 생각한다.

이항분포와 정규분포의 관계

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때, n이 충분히 크면 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(np,\ npq)$를 따른다.

이항분포에서 시행 횟수 n이 아주 큰 수이면 어떤 사건이 일어날 확률을 구하는 것이 쉽지 않다.

이를테면 주사위를 720번 던질 때, 6의 눈이 94번 이상 135번 이하로 나올 확률, 즉 $\sum_{x=94}^{135} {}_{720}\mathrm{C}_x \left(\frac{1}{6}\right)^x \left(\frac{5}{6}\right)^{720-x}$을 구하는 것은 매우 어려운 일이다.

이와 같은 경우 정규분포를 이용하여 그 근삿값을 구할 수 있다.

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때 $\mathrm{E}(X)=np$, $\mathrm{V}(X)=npq$이다.

또한 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때, $Z=\frac{X-np}{\sqrt{npq}}$라고 하면 충분히 큰 n에 대하여 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

함 께 하 기 /

익힘책 119쪽 | 익힘책 120쪽 | 익힘책 122쪽

1 한 개의 주사위를 720번 던질 때, 6의 눈이 94번 이상 135번 이하로 나올 확률을 구하여라.

풀이

한 개의 주사위를 720번 던질 때, 6의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(720,\ \frac{1}{6}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=720\times\frac{1}{6}=120,\ \sigma(X)=\sqrt{720\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}}=10$$

$n=720$, $p=\frac{1}{6}$에서
$np=120>5$
이므로 이 n은 충분히 크다고 볼 수 있다.

여기서 $n=720$은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(120,\ 10^2)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(94\le X\le 135)$
$=\mathrm{P}\left(\frac{94-120}{10}\le Z\le\frac{135-120}{10}\right)$
$=\mathrm{P}(-2.6\le Z\le 1.5)$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(94\le X\le 135)&=\mathrm{P}(-2.6\le Z\le 1.5)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 2.6)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=0.4953+0.4332\\&=\mathbf{0.9285}\end{aligned}$$

스 스 로 하 기 /

익힘책 119쪽 | 익힘책 120쪽 | 익힘책 122쪽

1 발아율이 80 %인 씨앗을 100개 뿌렸을 때, 다음을 구하여라.

(1) 발아한 씨앗이 80개 이상 92개 이하일 확률

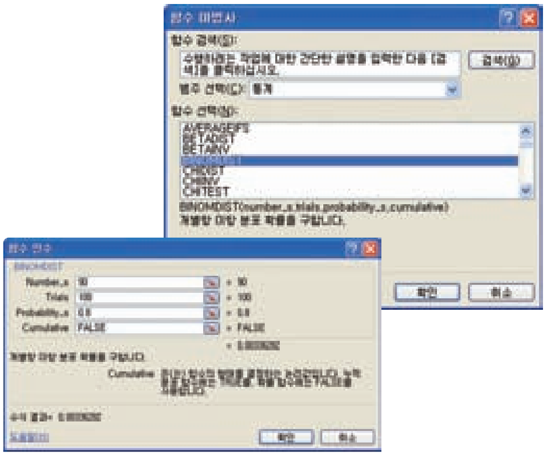
(2) 발아한 씨앗이 90개 이상일 확률

공 학 도 구

*수학적 개념을 공학 도구를 이용하여 이해하고 탐구해 보세요.

컴퓨터 프로그램을 이용한 확률 계산

1. 확률변수 X가 이항분포 $B(100,\ 0.8)$을 따를 때, 확률 $P(X=90)$을 구하여 보자.



1단계 수식 도구 상자에서 함수 삽입 아이콘을 클릭한다.

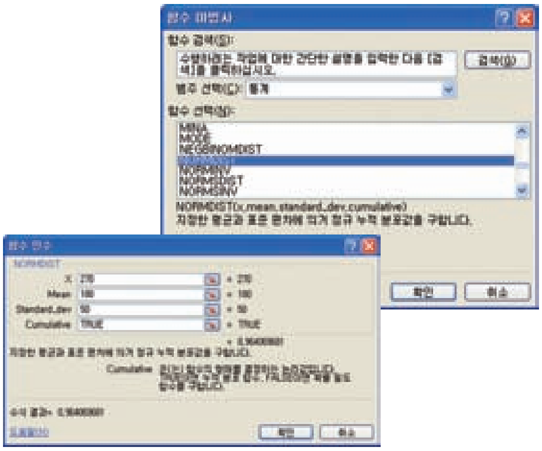
2단계 범주 선택에서 '통계', 함수 선택에서 'BINOMDIST'를 선택한 후 확인을 클릭한다.

3단계 오른쪽 화면과 같이 대화 상자에서 Number_s에 90, Trials에 100, Probability_s에 0.8을 입력하고, Cumulative에 FALSE를 입력한 후 확인을 클릭한다.

$\therefore P(X=90)=0.00336282$

| **참고** | Cumulative에 TRUE를 입력하면 확률 $P(X\le 90)$을 구할 수 있다.

2. 확률변수 X가 정규분포 $N(180,\ 50^2)$을 따를 때, 확률 $P(X\le 270)$을 구하여 보자.



1단계 수식 도구 상자에서 함수 삽입 아이콘을 클릭한다.

2단계 범주 선택에서 '통계', 함수 선택에서 'NORMDIST'를 선택한 후 확인을 클릭한다.

3단계 오른쪽 화면과 같이 대화 상자에서 X에 270, Mean에 180, Standard_dev에 50을 입력하고, Cumulative에 TRUE를 입력한 후 확인을 클릭한다.

$\therefore P(X\le 270)=0.964069681$

| **참고** | 수식 입력창에 다음과 같이 입력하면 확률 $P(180\le X\le 230)$을 구할 수 있다.

fx =NORMDIST(230,180,50,TRUE)-NORMDIST(180,180,50,TRUE)

$\therefore P(180\le X\le 230)=0.341344746$

새로 나온 용어와 기호: 확률변수, 이산확률변수, 확률질량함수, 확률분포, 연속확률변수, 확률밀도함수, 기댓값, 이항분포, 큰 수의 법칙, 정규분포, 표준화, 표준정규분포, $\mathrm{P}(X=x)$, $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$, $\sigma(X)$, $\mathrm{B}(n,\ p)$, $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$, $\mathrm{N}(0,\ 1)$

이산확률변수의 평균과 표준편차

이해

1 한 개의 주사위를 던져서 1의 눈이 나오면 100원, 2의 눈이 나오면 200원, $\cdots$, 6의 눈이 나오면 600원을 받는 게임에서 350원을 지불하고 주사위를 한 번 던질 때, 받는 금액에서 지불한 금액을 뺀 금액을 확률변수 X(원)라고 하자. X의 평균과 표준편차를 구하여라.

확률밀도함수

계산

2 연속확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)=ax\ (0\le x\le 2)$일 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 상수 a의 값을 구하여라.

(2) $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$를 각각 구하여라.

(3) $\mathrm{P}(0.5\le X\le 1.5)$의 값을 구하여라.

이항분포

의사소통

3 어느 핸드볼 선수의 슛 성공률이 60 %라고 한다. 이 선수가 한 시합에서 10회의 슛을 시도할 때, 성공하는 횟수의 평균, 분산 및 표준편차를 구하여라.

정규분포의 활용

문제 해결

4 어떤 과수원에서 생산된 포도 한 송이의 무게는 평균이 168.5 g, 표준편차가 5.5 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 과수원에서 생산된 포도 중 50송이를 조사할 때, 그 무게가 174 g 이상인 송이 수를 추측하여라.
(단, 소수 첫째 자리에서 반올림한다.)

이항분포와 정규분포의 관계

문제 해결

5 어떤 고등학교에서 근시인 학생의 비율이 전체의 40 %라고 한다. 이 학교의 학생 중 150명을 택할 때, 다음을 구하여라.

(1) 근시인 학생이 72명 이상일 확률

(2) 근시인 학생이 54명 이상 72명 이하일 확률

2 통계적 추정

이 단원을 배우면

- 모집단과 표본의 뜻을 알 수 있다.
- 표본평균과 모평균의 관계를 이해할 수 있다.
- 모평균을 추정하고, 그 결과를 해석할 수 있다.
- 표본비율과 모비율의 관계를 이해하여 모비율을 추정하고, 그 결과를 해석할 수 있다.

1 표본조사와 표본평균의 분포

2 모평균과 모비율의 추정

1 표본조사와 표본평균의 분포

학습 목표

- 모집단, 표본 및 임의추출의 뜻을 안다.
- 모평균, 모분산, 모표준편차의 뜻을 안다.
- 표본평균, 표본분산, 표본표준편차의 뜻을 안다.
- 표본평균과 모평균의 관계를 이해한다.

다 가 서 기 / 통계적 사고방식

이 이야기의 주인공은 백사 이항복(1556~1618)선생이다. 백사는 임진왜란 당시 임금을 보좌하고 백성을 잘 보살펴 국난 극복에 큰 공을 세웠다.

한 섬=열 말
한 말=열 되
한 되=열 홉

한 섬에 가득 들어 있는 콩의 개수를 일일이 세기는 어렵다. 그러나 한 홉의 콩의 개수를 세는 데는 5분도 걸리지 않는다.

한 홉에 들어 있는 콩의 개수가 500개이면 한 섬에 들어 있는 콩의 개수는 $500\times10\times10\times10=500000$(개)임을 유추할 수 있다.

이와 같이 전체를 다 조사하지 않고 일부분만 조사하여 전체를 예측하는 것을 통계적 사고방식이라고 할 수 있다.

01 표본조사

탐 구 하 기 / 합리적인 설문 조사 방법

개교기념일 행사에 대한 전교생의 의견을 알아보기 위하여 100명을 뽑아 설문 조사를 하려고 한다. 다음 중 어느 것이 더 합리적인 방법인지 택하고, 그 이유를 말하여 보자.

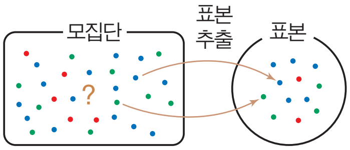
1. 특정 학년에서만 뽑는다.
2. 각 학년에서 골고루 뽑는다.

알 아 보 기 / 모집단과 표본의 뜻을 알아보자.

어떤 지역의 가구당 교육비를 알고 싶을 때, 이 지역의 모든 가구를 방문하여 교육비를 조사하면 그 상태를 알 수 있다. 이와 같이 조사의 대상이 되는 집단 전체를 **모집단**이라 하고, 모집단 전체를 조사하는 것을 **전수조사**라고 한다. 전수조사의 대표적인 예로는 인구 조사가 있다.

통계조사
- 전수조사(全數調査)
- 표본조사(標本調査)

반면에 어떤 지역에서 100가구를 택하여 교육비를 알아보고, 그 결과에서 전체 가구의 교육비를 추측할 수도 있다. 이와 같이 모집단의 일부를 추출한 부분집합을 **표본**이라 하고, 표본을 조사하는 것을 **표본조사**라고 한다.



또 추출된 표본의 개수를 표본의 크기라고 한다.

우리나라에서는 인구 조사를 매 5년마다 실시한다.

전구의 수명을 조사할 때, 전수조사를 하면 검사가 끝난 전구는 못 쓰게 되므로 표본조사를 한다.

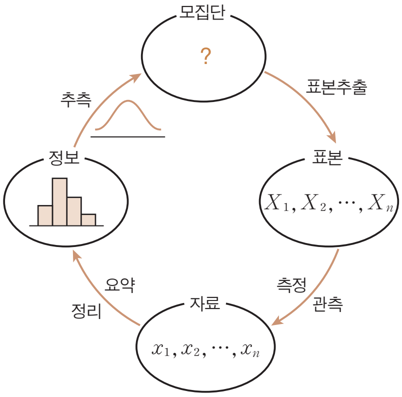
일반적으로 전수조사는 표본조사에 비하여 시간과 비용이 많이 들고, 전수조사가 불가능한 경우도 있으므로 특별한 경우를 제외하고는 전수조사보다 표본조사를 많이 한다.

스 스 로 하 기 / 익힘책 127쪽 | 익힘책 128쪽 | 익힘책 129쪽

1 전수조사와 비교하여 표본조사의 장점을 말하여라.

알 아 보 기 / 임의추출의 뜻을 알아보자.

표본조사의 목적은 표본에서 얻은 정보를 바탕으로 모집단의 성질을 추측하는 데 있다. 따라서 모집단의 특징이 잘 반영되도록 표본을 택하는 것이 중요하다.



이를 위해서는 추출되는 표본이 모집단의 어느 한 부분에 편중되지 않아야 한다. 즉, 모집단의 각 원소가 같은 확률로 추출되어야 한다.

앞으로 특별한 언급이 없으면 표본은 임의표본을 뜻한다.

이와 같은 추출법을 **임의추출**이라 하고, 임의추출된 표본을 임의표본이라고 한다.

표본을 추출하는 데에는 한 번 추출된 원소를 다시 되돌려 놓은 후 다음 원소를 뽑는 복원추출과 되돌려 놓지 않고 다음 원소를 뽑는 비복원추출이 있다.

모집단의 크기가 충분히 큰 경우에는 비복원추출도 복원추출로 볼 수 있다.

난수주사위
0에서 9까지의 숫자를 각각 두 번 사용하여 정이십면체의 각 면에 숫자 하나씩을 새긴 주사위이다.

모집단에서 표본을 임의추출하는 방법으로는 제비뽑기, 난수주사위 사용하기, 난수표 사용하기 등이 있다.

그러나 공학 도구가 발전된 요즈음에는 계산기, 컴퓨터 소프트웨어를 많이 사용한다.

스 스 로 하 기 / 익힘책 127쪽 | 익힘책 128쪽 | 익힘책 129쪽

2 숫자 1, 2, 3이 각각 적힌 3개의 공이 들어 있는 주머니에서 공 2개를 복원추출하는 경우는 모두 몇 가지인지 구하여라.

3 위의 스스로 하기 **2**에서 다음과 같이 추출하는 경우의 수를 구하여라.

(1) 비복원으로 2개를 추출한다.

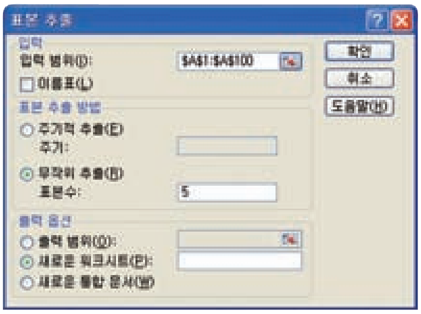
(2) 동시에 2개를 추출한다.

수 학 실험실

컴퓨터 프로그램과 계산기를 이용한 임의추출

1. 컴퓨터 소프트웨어를 이용한 임의추출

크기 100인 모집단에서 5개의 표본을 임의추출하여 보자.



❶ A1～A100 셀에 1, 2, 3, ⋯, 100을 입력한다.

❷ 데이터 도구 상자에서 데이터 분석을 클릭하고, 표본추출을 선택하면 오른쪽 그림과 같은 화면이 나타난다.

❸ 입력 범위는 A1～A100 셀을 지정한다.(입력 범위란을 클릭한 후, A1 셀을 클릭하고 A100 셀까지 마우스 끌기를 하면 자동으로 지정된다.) 표본추출 방법을 무작위 추출로 선택한 뒤 표본수에 5를 입력한다.

❹ 출력 옵션을 새로운 워크시트로 선택하고 확인을 클릭하면 새로운 워크시트에 임의추출된 5개의 숫자가 나타난다.

2. 계산기를 이용한 임의추출

공학용 계산기에는 난수를 만드는 기능 키가 있다. 이들은 대부분 RANDOM 또는 RAND로 표시되어 있는데, 이것을 누르면 0과 1 사이의 난수를 얻을 수 있다. 이들 수에 1000을 곱하면 000에서 999까지의 난수가 생긴다.

이를테면 1000명 중에서 5명을 임의추출하는 순서는 다음과 같다.

❶ 각 사람에게 000에서 999까지의 번호를 붙인다.

❷ [2ndF] [7](RANDOM) [=] 을 누르고, [=] 를 눌러 난수를 얻는다. 이때, [=] 를 누를 때마다 새로운 난수를 얻을 수 있다.

❸ ❷에서 얻은 난수에 1000을 곱한 수를 번호로 하는 5명을 표본으로 택한다.

논술/수행 평가 과제

1. 컴퓨터 프로그램을 이용하여 우리 반 학생 중에서 5명을 임의추출하여 보자.

2. 계산기를 이용하여 우리 반 학생 중에서 5명을 임의추출하여 보자.

02 표본평균의 뜻

알 아 보 기 / 표본평균의 뜻을 알아보자.

모집단에서 조사의 대상이 되는 특성을 나타내는 확률변수를 X라고 할 때, X의 평균, 분산, 표준편차를 각각 **모평균**, **모분산**, **모표준편차**라 하고, 각각 기호로 m, σ^2, σ와 같이 나타낸다.

한편 어떤 모집단에서 크기 n인 표본 X_1, X_2, $\cdots$, X_n을 임의추출하였을 때, 이들의 평균, 분산, 표준편차를 각각 **표본평균**, **표본분산**, **표본표준편차**라 하고, 각각 기호로 $\overline{X}$, S^2, S와 같이 나타낸다.

표본은 확률변수이므로 대문자 X_1, X_2, $\cdots$, X_n으로 나타낸다.

$$\text{표본평균: } \overline{X}=\frac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\text{표본분산: } S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,\ \text{표본표준편차: } S=\sqrt{S^2}$$

표본평균, 표본분산, 표본표준편차는 표본에 따라 다른 값을 가지므로 확률변수이다.

| 보기 | 1, 2, 3, $\cdots$, 9, 10으로 구성된 모집단을 생각하고 1개의 숫자를 임의추출할 때, 나오는 숫자를 확률변수 X라고 하면

(1) 모평균: $m=5.5$, 모분산: $\sigma^2=8.25$, 모표준편차: $\sigma=\sqrt{8.25}$

$m=\frac{1}{10}(1+2+3+\cdots+10)$
$=5.5$
$\sigma^2=\frac{1}{10}\{(1-5.5)^2+(2-5.5)^2+\cdots+(10-5.5)^2\}$
$=8.25$

(2) 표본으로 2, 6, 7이 택해졌다면

$\overline{X}$의 값: $\frac{1}{3}(2+6+7)=5$

S^2의 값: $\frac{1}{3-1}\{(2-5)^2+(6-5)^2+(7-5)^2\}=7$

S의 값: $\sqrt{7}$

(3) 표본으로 3, 4, 5가 택해졌다면

$\overline{X}$의 값: $\frac{1}{3}(3+4+5)=4$

S^2의 값: $\frac{1}{3-1}\{(3-4)^2+(4-4)^2+(5-4)^2\}=1$

S의 값: 1

(2), (3)과 같이 $\overline{X}$, S^2, S는 표본에 따라 다른 값을 가지는 확률변수이다.

스 스 로 하 기 /

익힘책 127쪽 | 익힘책 128쪽 | 익힘책 129쪽

1 크기가 5인 표본 1, 3, 5, 7, 9에 대하여 표본평균, 표본분산 및 표본표준편차의 값을 각각 구하여라.

03 표본평균의 분포

알 아 보 기 / 표본평균의 분포를 살펴보고, 표본평균과 모평균의 관계를 알아보자.

X	2	4	6	8	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

숫자 2, 4, 6, 8이 각각 적힌 4개의 공을 모집단으로 생각하고 1개의 공을 임의추출할 때, 공에 적힌 숫자를 확률변수 X라고 하면

$$m=5,\ \sigma^2=5,\ \sigma=\sqrt{5}$$

여기서 크기 $n=2$인 표본을 복원추출하여 그 공에 적힌 숫자를 X_1, X_2라고 하자. 이때, 표본평균 $\overline{X}=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$는 X_1, X_2의 값에 따라 다른 값을 가지는 확률변수이다.

$X_1 \backslash X_2$	2	4	6	8
2	2	3	4	5
4	3	4	5	6
6	4	5	6	7
8	5	6	7	8

표본평균 $\overline{X}=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$의 분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

$\overline{X}$는 확률변수이고 $\overline{x}$는 $\overline{X}$를 측정하여 얻은 값이다.

$\overline{X}$	2	3	4	5	6	7	8	합계
$\mathrm{P}(\overline{X}=\overline{x})$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	1

따라서 $\overline{X}=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$의 평균과 분산은 각각 다음과 같다.

$$\mathrm{E}(\overline{X})=5,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{5}{2}$$

이것을 m과 σ로 나타내면

$$\mathrm{E}(\overline{X})=5=m,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{5}{2}=\frac{\sigma^2}{n}$$

임을 알 수 있다.

같은 방법으로 크기 $n=3$인 표본 X_1, X_2, X_3을 택하고, 그 표본평균 $\overline{X}=\frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)$의 분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

$\overline{X}=\frac{8}{3}$인 경우의 수는
$X_1=2,\ X_2=2,\ X_3=4$
$X_1=2,\ X_2=4,\ X_3=2$
$X_1=4,\ X_2=2,\ X_3=2$
의 3가지이다.

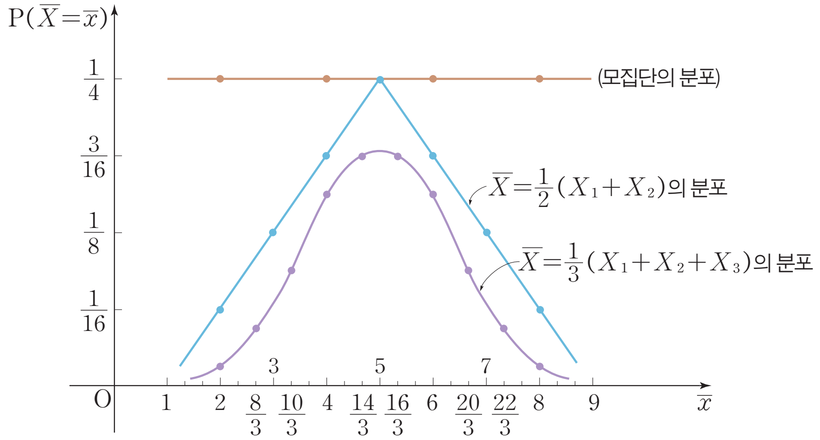
$\overline{X}$	2	$\frac{8}{3}$	$\frac{10}{3}$	4	$\frac{14}{3}$	$\frac{16}{3}$	6	$\frac{20}{3}$	$\frac{22}{3}$	8	합계
$\mathrm{P}(\overline{X}=\overline{x})$	$\frac{1}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{1}{64}$	1

따라서 $\overline{X}=\frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)$의 평균과 분산은 각각 다음과 같다.

$$\mathrm{E}(\overline{X})=5,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{5}{3}$$

즉, $\mathrm{E}(\overline{X})=5=m$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{5}{3}=\frac{\sigma^2}{n}$임을 알 수 있다.

앞의 모집단의 분포와 크기 $n=2$ 및 $n=3$인 표본평균의 분포를 그래프로 나타내면 다음과 같다.



일반적으로 표본평균 $\overline{X}$의 분포는 다음과 같다.

표본평균 $\overline{X}$의 분포

모평균이 m이고 모표준편차가 σ인 모집단에서 크기 n인 임의표본을 복원추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

(1) $E(\overline{X})=m,\ V(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{n},\ \sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

(2) 모집단의 분포가 정규분포이면 $\overline{X}$는 n의 크기에 관계없이 정규분포 $N\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

(3) 모집단의 분포가 정규분포가 아닐 때에도 표본의 크기 n이 충분히 크면 $\overline{X}$의 분포는 정규분포 $N\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$에 가까워진다.

모집단이 충분히 크면 비복원추출일 때에도 오른쪽의 성질은 성립한다.

스스로 하기 /

익힘책 127쪽 | 익힘책 128쪽 | 익힘책 129쪽

1 정규분포 $N(5,\ 36)$을 따르는 모집단에서 크기 $n=16$인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$의 평균과 표준편차를 구하여라.

2 모평균이 6, 모표준편차가 3인 모집단에서 크기 $n=100$인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$의 분포를 말하여라.

함 께 하 기 /

익힘책 127쪽 | 익힘책 128쪽 | 익힘책 129쪽

1 어느 회사에서 생산하는 전구의 수명 시간 X의 분포는 평균이 2000시간, 표준편차가 200시간인 정규분포를 따른다고 한다. 400개의 전구를 임의추출하여 수명 시간을 조사할 때, 다음을 구하여라.

(1) 표본평균이 1990시간 이상 2010시간 이하일 확률

(2) 표본평균이 1980시간 이하일 확률

풀이

$m=2000$, $\sigma=200$, $n=400$이므로 표본평균 $\overline{X}$는

$$\mathrm{E}(\overline{X})=m=2000,\ \sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{200}{20}=10$$

인 정규분포 $\mathrm{N}(2000,\ 10^2)$을 따른다.

여기서 $Z=\dfrac{\overline{X}-2000}{10}$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

(1) 표본평균이 1990시간 이상 2010시간 이하인 경우는 $1990\le\overline{X}\le2010$일 때이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(1990\le\overline{X}\le2010)&=\mathrm{P}(-1\le Z\le1)\\&=2\mathrm{P}(0\le Z\le1)\\&=2\times0.3413\\&=\mathbf{0.6826}\end{aligned}$$

(2) 표본평균이 1980시간 이하인 경우는 $\overline{X}\le1980$일 때이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\le1980)&=\mathrm{P}(Z\le-2)=\mathrm{P}(Z\ge2)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le2)\\&=0.5-0.4772\\&=\mathbf{0.0228}\end{aligned}$$

스 스 로 하 기 /

익힘책 127쪽 | 익힘책 128쪽 | 익힘책 129쪽

3 어느 지역의 가구당 한 달 수입액 X의 분포는 평균이 300만 원, 표준편차가 10만 원인 정규분포를 따른다고 한다. 이 지역의 가구 중 다음과 같은 크기의 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$가 302만 원 이상이 될 확률을 각각 구하여라.

(1) $n=25$ (2) $n=100$ (3) $n=225$

모 둠 학 습

- **학습 목표**_ 표본평균과 모평균의 관계를 알아보자.
- **학습 방법**_ 모평균과 표본평균을 이용하여 각 모둠 과제를 해결한다.
- **모둠의 구성**_ 각자가 속한 모둠에 대하여 다음 표에 적어 보자.

모둠 이름	모둠 인원: 명 으뜸이: 발표자:
	모둠 구성원 이름:

오른쪽 표는 어느 고등학교 2학년 남학생 200명 전체의 키를 번호순으로 나열한 것이다. 이 자료에서

모평균: $m=171.34$

모분산: $\sigma^2=50.5644$

모표준편차: $\sigma\fallingdotseq7.1109$

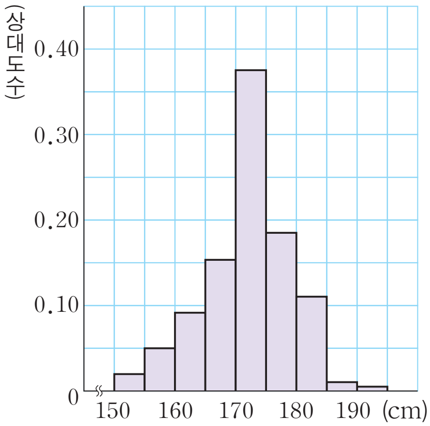
이다.

(단위: cm)

번호	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
00	173	177	174	171	172	174	172	179	178	167
01	164	172	173	173	178	165	177	177	186	179
02	165	171	175	169	182	174	171	173	179	162
03	173	175	183	168	175	174	165	183	171	180
04	178	178	161	158	178	169	167	171	172	180
05	180	170	171	181	179	176	173	165	174	181
06	188	172	180	174	171	171	176	154	165	182
07	166	172	183	174	170	177	170	173	170	171
08	173	170	162	166	170	170	164	178	179	165
09	156	155	162	175	161	163	176	191	180	180
10	181	174	172	174	171	169	168	172	177	174
11	174	160	153	169	171	168	171	170	172	172
12	171	172	172	175	176	164	174	172	175	180
13	154	151	168	166	181	179	172	180	173	165
14	173	173	162	179	168	181	164	172	168	168
15	171	173	166	160	163	169	161	165	176	180
16	176	170	174	170	180	171	170	175	170	176
17	173	179	184	168	169	167	159	155	158	156
18	170	169	162	169	171	177	181	171	173	175
19	176	171	164	173	170	177	160	156	155	158

이를 상대도수의 분포표와 그 그래프로 나타내면 오른쪽과 같다.

계급(cm)	도수(명)	상대도수
150이상~155미만	4	0.02
155 ~160	10	0.05
160 ~165	18	0.09
165 ~170	31	0.155
170 ~175	75	0.375
175 ~180	37	0.185
180 ~185	22	0.11
185 ~190	2	0.01
190 ~195	1	0.005
합계	200	1



*각 모둠별로 토론하여 모둠 과제를 해결한 후, 발표자가 그 결과를 발표해 보세요.

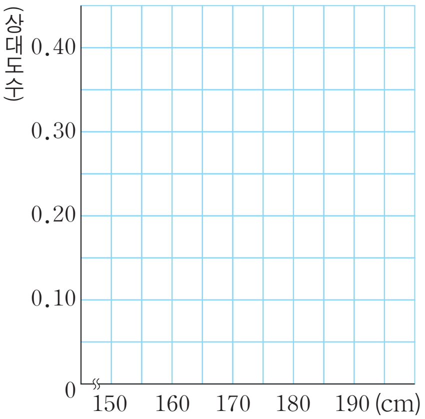
| 모둠 과제1 | 학생 각자가 제비뽑기, 난수표, 계산기 또는 컴퓨터를 이용하여 10명의 표본을 택하고, 이들의 키를 기록하여라. 또 10개의 표본에 대한 표본평균을 구하고, 이를 모평균과 비교하여라.

| 모둠 과제2 | 모둠에 속한 학생 각자가 **| 모둠 과제1 |** 에서 구한 표본평균의 값들을 기록하여라. 또 이 값들의 평균을 구하고, 이를 모평균과 비교하여라.

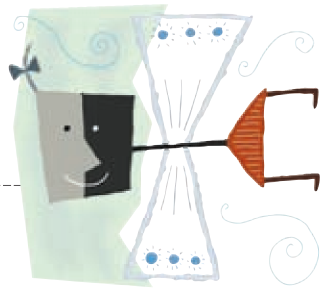
| 모둠 과제3 | 학급의 모든 학생 각자가 **| 모둠 과제1 |** 에서 구한 표본평균의 값들을 기록하여라. 또 이 값들의 평균을 구하고, 이를 모평균과 비교하여라.

| 모둠 과제4 | **| 모둠 과제3 |** 에 있는 값들에 대한 상대도수의 분포표를 만들고, 그 그래프를 히스토그램으로 그려라. 또 이들을 166쪽에 있는 모집단의 상대도수의 분포표 및 그 그래프와 비교하여라.

계급(cm)	도수(명)	상대도수
150이상~155미만		
155 ~160		
160 ~165		
165 ~170		
170 ~175		
175 ~180		
180 ~185		
185 ~190		
190 ~195		
합계		



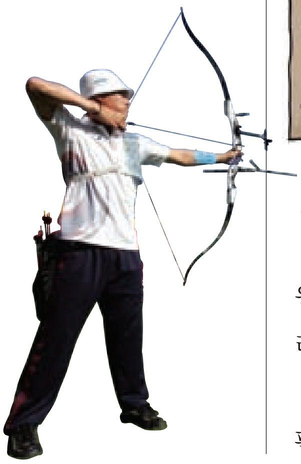
2 모평균과 모비율의 추정



학습 목표

- 추정, 신뢰도, 신뢰구간의 뜻을 이해한다.
- 모평균을 추정하고, 그 결과를 해석할 수 있다.
- 표본비율과 모비율의 관계를 이해하여 모비율을 추정하고, 그 결과를 해석할 수 있다.

다 가 서 기 / 과녁의 중심 찾기



양궁 과녁판의 뒤쪽에서 과녁의 중심을 찾는 것은 어려운 일이다. 그러나 과녁판에 꽂힌 화살을 중심으로 원을 그리면 과녁의 중심이 그 원 안에 있을 확률이 높다. 그리고 화살이 많이 있을수록 중심을 찾을 확률은 더 높아진다.

통계적 추정은 이와 같이 꽂힌 화살(표본)을 이용하여 과녁판의 뒤쪽에서 과녁의 중심(모평균)을 찾는 것과 같다.

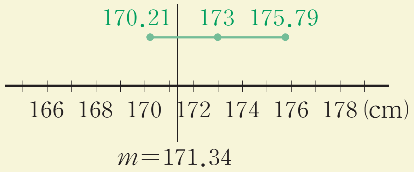
01 모평균의 추정

탐 구 하 기 / 신뢰구간 만들기

앞의 166쪽에 주어진 키의 자료는 정규분포 $\mathrm{N}(171.34,\ 7.1109^2)$을 따른다고 할 수 있다. 이 자료에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. 이 모집단에서 크기 $n=25$인 표본을 택하고 그 표본평균을 $\overline{X}$라고 할 때, $\mathrm{E}(\overline{X})$와 $\mathrm{V}(\overline{X})$를 구하여라.
2. 크기 $n=25$인 표본을 실제로 임의추출하고, 그 표본평균의 값 $\overline{x}$를 구하여라.

3. $\overline{x}=173$에 대하여 다음과 같은 끝 값을 가지는 구간을 나타내면 오른쪽 그림과 같다. 이와 같은 방법으로 물음 2에서 구한 $\overline{x}$에 대하여 다음 끝 값을 가지는 구간을 나타내어라.

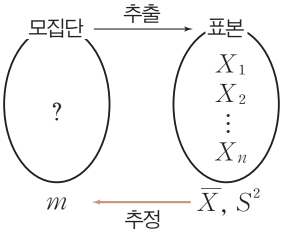


왼쪽 끝 값: $\overline{x}-1.96\times\dfrac{7.1109}{\sqrt{25}}$, 오른쪽 끝 값: $\overline{x}+1.96\times\dfrac{7.1109}{\sqrt{25}}$

4. 각자 만든 구간을 발표하고, 다른 사람이 만든 구간을 위의 그림에 함께 그려라.
5. 여러 사람이 만든 구간 중 $m=171.34$를 포함하는 비율을 구하여라.

알 아 보 기 / 모평균을 추정하여 보자.

표본에서 얻은 정보를 이용하여 모집단의 평균, 표준편차 등을 추측하는 방법을 **추정**이라고 한다. 이를테면 표본평균 $\overline{X}$를 이용하여 모평균 m을 추정할 수 있다.



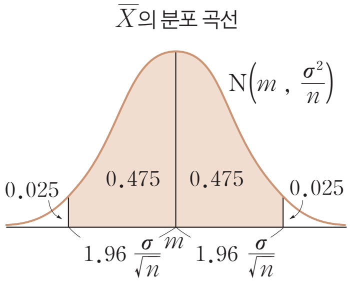
이제 모평균을 추정하는 방법을 알아보자.

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 이루는 모집단에서 크기 n인 표본 $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

따라서 $\overline{X}$를 표준화한 확률변수

$$Z=\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

은 표준정규분포 N(0, 1)을 따르므로 $\mathrm{P}(|Z|\le 1.96)=0.95$이다. 즉



$$\mathrm{P}\left(-1.96\le\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\le 1.96\right)=\mathrm{P}\left(\overline{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{X}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$=0.95$$

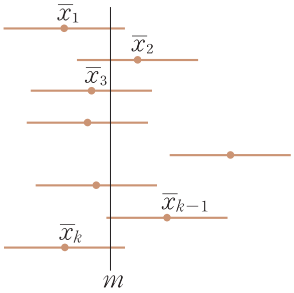
여기서 표본평균 $\overline{X}$의 값을 $\overline{x}$라고 할 때, 다음과 같은 구간

$$\overline{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

를 모평균 m의 **신뢰도** 95 %인 **신뢰구간**이라고 한다.

네이만(Neyman, J. ; 1894~1981)
폴란드 태생의 미국 통계학자로서 1937년 신뢰구간의 개념을 창안하였다.

표본평균 $\overline{X}$는 확률변수이므로 추출되는 표본에 따라 그 값이 달라지며, 따라서 신뢰구간도 달라진다.



그러므로 '신뢰도 95 %인 신뢰구간'의 뜻은 크기 n인 표본을 여러 번 추출하여 신뢰구간을 만들 때, 이들 중 모평균 m을 포함하는 것이 약 95 %라는 의미이다.

한편 $\mathrm{P}(|Z|\le 2.58)=0.99$이므로 모평균 m의 신뢰도 99 %인 신뢰구간은 다음과 같다.

$$\overline{x}-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

모평균 m의 신뢰구간

평균이 m이고 표준편차가 σ인 정규분포를 따르는 모집단에서 임의추출한 크기 n인 표본 X_1, X_2, $\cdots$, X_n의 평균을 $\overline{X}$라고 할 때

(1) 신뢰도 95 %인 신뢰구간: $\overline{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{X}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

(2) 신뢰도 99 %인 신뢰구간: $\overline{X}-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{X}+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

모표준편차 σ의 값을 알 수 없는 경우에 표본의 크기 n이 클 때($n\ge 30$)에는 σ 대신 표본표준편차 S를 이용할 수 있다.

함 께 하 기 /

익힘책 133쪽 | 익힘책 134쪽 | 익힘책 135쪽

1 어떤 회사에서 생산하는 통조림의 무게는 평균이 m g이고, 표준편차가 10 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 통조림 25개를 임의추출하여 표본평균을 구하였더니 그 값이 502 g이 되었을 때, 모평균 m에 대하여 신뢰도 95 %, 99 %인 신뢰구간을 각각 구하여라.

풀이

$n=25$, $\bar{x}=502$, $\sigma=10$이므로

(i) 모평균 m의 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$$502-1.96\frac{10}{\sqrt{25}}\le m\le 502+1.96\frac{10}{\sqrt{25}}$$

$$502-3.92\le m\le 502+3.92$$

$$\therefore\ \mathbf{498.08\le m\le 505.92}$$

(ii) 모평균 m의 신뢰도 99 %인 신뢰구간은

$$502-2.58\frac{10}{\sqrt{25}}\le m\le 502+2.58\frac{10}{\sqrt{25}}$$

$$502-5.16\le m\le 502+5.16$$

$$\therefore\ \mathbf{496.84\le m\le 507.16}$$

스 스 로 하 기 /

익힘책 133쪽 | 익힘책 134쪽 | 익힘책 135쪽

1 모표준편차가 6인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 100인 표본을 추출하여 그 평균을 구했더니 60이었다. 모평균 m에 대하여 신뢰도 95 %, 99 %인 신뢰구간을 각각 구하여라.

2 어느 회사에서 생산하는 음료수의 A 성분의 함유량은 정규분포를 따른다고 한다. 이 음료수 400병을 임의추출하여 A 성분의 함유량을 검사하였더니 평균이 30.5 mg, 표준편차가 5.8 mg이었다. 이 음료수 1병에 담긴 A 성분의 평균 함유량 m에 대하여 다음을 구하여라.

(1) 신뢰도 95 %인 신뢰구간

(2) 신뢰도 99 %인 신뢰구간

모표준편차를 모를 때에는 표본표준편차를 사용한다.

공학 도구

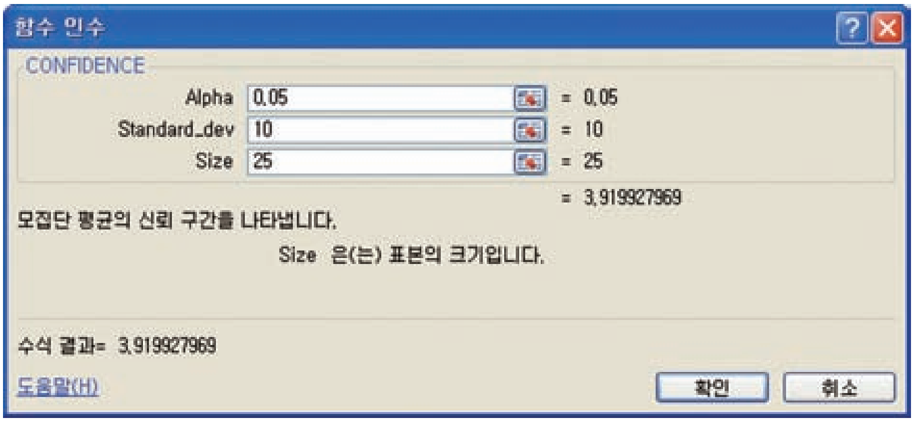
*수학적 개념을 공학 도구를 이용하여 이해하고 탐구해 보세요.

컴퓨터 프로그램을 이용하여 신뢰구간 구하기

CONFIDENCE 함수를 이용하여 신뢰구간을 구할 수 있다.
이를테면 171쪽의 함께하기 **1**에서 신뢰도 95 %인 신뢰구간을 다음 순서로 구하여 보자.

1단계 수식 도구 상자에서 함수 삽입 아이콘을 클릭하면 '함수 마법사' 대화 상자가 나타난다. 이때, 범주 선택에서 '통계', 함수 선택에서 'CONFIDENCE'를 선택한 후 확인을 클릭하면 '함수 인수' 대화 상자가 나타난다.

2단계 Alpha에 {1−(신뢰도)}, Standard_dev에 표준편차, Size에 표본의 크기를 입력한 후 확인을 클릭한다.
여기서는 신뢰도가 95 %, 표준편차가 10, 표본의 크기가 25인 경우이므로 Alpha에 0.05, Standard_dev에 10, Size에 25를 입력한다.



3단계 위의 **1, 2, 3단계**를 실행하면 그 결과가 3.919927969로 나온다.
여기서 3.919927969를 소수 셋째 자리에서 반올림하여 3.92로 쓰자.

4단계 모평균 m의 신뢰구간은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$502-3.92\leq m\leq 502+3.92$$

$$\therefore\ 498.08\leq m\leq 505.92$$

02 표본비율의 분포

알 아 보 기 / 모비율과 표본비율의 뜻을 알아보자.

제품의 불량률, 정책에 대한 찬성률, 어떤 정당의 지지율, 즐겨 보는 TV 프로그램의 시청률 등은 우리 생활 주변에서 흔히 접할 수 있으며, 이들을 조사하고 분석하는 것은 우리의 의사 결정에 많은 영향을 미친다.

이와 같이 모집단의 어떤 사건에 대한 비율을 그 사건에 대한 **모비율**이라 하고, 기호로 p와 같이 나타낸다. 또 모집단에서 임의추출한 표본에서의 어떤 사건에 대한 비율을 그 사건에 대한 **표본비율**이라 하고, 기호로

$$\hat{p}$$

과 같이 나타낸다.

p는 비율을 나타내는 proportion의 첫 글자이다.

$\hat{p}$은 'p-hat(피 햇)'으로 읽는다.

일반적으로 어떤 사건에 대한 표본비율은 다음과 같다.

표본비율

크기 n인 표본에서 어떤 사건이 일어난 횟수를 확률변수 X라고 할 때, 그 사건에 대한 표본비율 $\hat{p}$은

$$\hat{p}=\frac{X}{n}$$

| 보기 | 2007년 우리나라에서 태어난 아이의 수는 496710명이고, 이 중에서 남자 아이의 수는 255762명이다. 이때, 2007년 우리나라에서 남자 아이가 태어난 비율, 즉 모비율 p는 다음과 같다.

$$p=\frac{255762}{496710}\fallingdotseq 0.515$$

한편 2007년에 태어난 아이들 중에서 1000명을 임의추출하였더니 남자 아이가 508명이라면, 표본비율 $\hat{p}$은 다음과 같다.

$$\hat{p}=\frac{X}{n}=\frac{508}{1000}=0.508$$

스 스 로 하 기 / 익힘책 133쪽 | 익힘책 134쪽 | 익힘책 135쪽

1 어느 형광등 회사에서 생산된 제품 중 500개를 임의추출하여 검사한 결과 불량품이 2개였다고 한다. 표본의 불량률 $\hat{p}$을 구하여라.

알 아 보 기 / 표본비율의 분포를 구하여 보자.

표본비율 $\hat{p}=\frac{X}{n}$에서 확률변수 X는 크기 n인 표본에서 어떤 사건이 일어난 횟수이므로 X가 가질 수 있는 값은 $0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$이고, 모집단에서 그 사건이 일어날 확률은 p이다. 즉, 확률변수 X는 어떤 사건이 일어날 확률이 p인 시행을 n번 독립시행했을 때, 그 사건이 일어난 횟수이므로 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르게 된다.

따라서 X의 평균과 분산은 각각 $\mathrm{E}(X)=np,\ \mathrm{V}(X)=npq$이다.

이때, $\hat{p}$의 평균, 분산 및 표준편차는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\hat{p})&=\mathrm{E}\left(\frac{X}{n}\right)=\frac{1}{n}\mathrm{E}(X)\\&=\frac{1}{n}\cdot np=p\\\mathrm{V}(\hat{p})&=\mathrm{V}\left(\frac{X}{n}\right)=\frac{1}{n^2}\mathrm{V}(X)\\&=\frac{1}{n^2}\cdot npq=\frac{pq}{n}\\\sigma(\hat{p})&=\sqrt{\mathrm{V}(\hat{p})}=\sqrt{\frac{pq}{n}}\end{aligned}$$

일반적으로 표본의 크기 n이 충분히 클 때, $\hat{p}$의 분포는 정규분포에 가까워지는 것으로 알려져 있다.

즉, $\hat{p}$은 n이 충분히 클 때 정규분포 $\mathrm{N}\left(p,\ \frac{pq}{n}\right)$에 가까워지며, 확률변수

$$Z=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$에 가까워진다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

n이 $np\geq5$ 또는 $nq\geq5$를 만족할 때, n을 충분히 큰 값으로 생각한다.

표본비율의 분포

표본비율 $\hat{p}$은 표본의 크기 n이 충분히 클 때, 정규분포 $\mathrm{N}\left(p,\ \frac{pq}{n}\right)$에 가까워지고 $Z=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$에 가까워진다.

함 께 하 기 /

익힘책 133쪽 | 익힘책 134쪽 | 익힘책 135쪽

1 어떤 과수원에서 생산되는 사과의 10 %가 규격 미달이라고 한다. 이 과수원에서 생산된 사과 100개를 임의추출할 때, 규격 미달인 사과가 10개 이상 13개 이하일 확률을 구하여라.

$np=100\times0.1=10>5$이므로 n은 충분히 크다.

풀이

표본에 있는 100개의 사과 중에서 규격 미달인 것의 비율을 $\hat{p}$이라고 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(0.1\le\hat{p}\le0.13)$이다.

여기서 모비율 $p=0.1$이고 $n=100$은 충분히 크므로

$$Z=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}=\frac{\hat{p}-0.1}{\sqrt{\frac{0.1\times0.9}{100}}}=\frac{\hat{p}-0.1}{0.03}$$

은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$에 가까워진다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(0.1\le\hat{p}\le0.13)&=\mathrm{P}\left(\frac{0.1-0.1}{0.03}\le Z\le\frac{0.13-0.1}{0.03}\right)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le1)\\&=\mathbf{0.3413}\end{aligned}$$

스 스 로 하 기 /

익힘책 133쪽 | 익힘책 134쪽 | 익힘책 135쪽

2 어느 도시 주민의 20 %가 과체중이라고 한다. 이 도시에서 주민 100명을 임의추출할 때, 25명 이상이 과체중일 확률을 구하여라.

3 어떤 정책에 대하여 주민의 60 %가 찬성한다고 한다. 이 지역 주민 96명을 임의추출할 때, 그 정책에 대하여 찬성하는 사람이 48명 이상 60명 이하일 확률을 구하여라.

4 멘델의 유전 법칙에 의하면 노란색과 녹색의 완두콩을 교배할 때, 제2세대에서 노란색의 완두콩이 나올 비율은 0.75이고 녹색의 완두콩이 나올 비율은 0.25이다. 제2세대의 완두콩 300개를 조사할 때, 노란색 완두콩의 비율이 0.7 이상 0.8 이하일 확률을 구하여라.

03 모비율의 추정

알 아 보 기 / 모비율을 추정하여 보자.

어느 모집단에서 크기 n인 표본을 임의추출하였을 때, 이 중에서 어떤 사건이 일어난 횟수를 확률변수 X라고 하면 표본비율 $\hat{p}=\dfrac{X}{n}$는 n이 충분히 클 때 정규분포 $\mathrm{N}\left(p,\ \dfrac{pq}{n}\right)$에 가까워진다.

따라서 $Z=\dfrac{\hat{p}-p}{\sqrt{\dfrac{pq}{n}}}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$에 가까워진다.

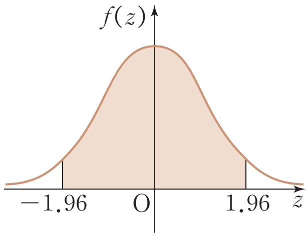
또 n이 충분히 클 때, $\hat{p}$의 분산 $\dfrac{pq}{n}$에서 미지의 값인 p, q 대신에 표본비율을 대입한 $Z=\dfrac{\hat{p}-p}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}}$도 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$에 가까워진다는 것이 알려져 있다.

$q=1-p$이므로 $\hat{q}=1-\hat{p}$

그러므로 표준정규분포표에서

$\mathrm{P}(-1.96\le Z\le 1.96)=0.95$

이고, 이 식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.



$$\mathrm{P}\left(-1.96\le\dfrac{\hat{p}-p}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}}\le 1.96\right)$$

$$=\mathrm{P}\left(\hat{p}-1.96\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\le p\le\hat{p}+1.96\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right)$$

$$=0.95$$

여기서 $\hat{p}-1.96\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\le p\le\hat{p}+1.96\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$이 모비율 p의 신뢰도 95 %인 신뢰구간이다.

일반적으로 모비율 p의 신뢰구간은 다음과 같다.

모비율 p의 신뢰구간

(1) 신뢰도 95 %인 신뢰구간: $\hat{p}-1.96\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\le p\le\hat{p}+1.96\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

(2) 신뢰도 99 %인 신뢰구간: $\hat{p}-2.58\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\le p\le\hat{p}+2.58\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

| 보기 | 다음은 원자력 발전 비중에 대한 여론 조사의 결과이다.

국민 3명 중 2명이 원전 확대 찬성

국민 3명 중 2명은 원전 비중을 '현재보다 늘려야 한다.(67.5 %)'는 의견에 찬성하고, 거주지 내 원전 건설에 대해서도 '찬성하거나 지역 투자 규모를 보고 결정하겠다.(67.4 %)'는 의견을 피력하였다.

《여론 조사 결과》

(단위: %)

항목	2008
원자력 발전 비중을 늘려야 한다.	67.5
거주 지역 내 원전 건설에 찬성한다.	34.6
(지역 발전 투자 금액을 보고 결정하겠다.)	32.8

※여론 조사 개요
○조사 기간 : 2008년 7월 12일
○조사 대상 : 전국 19세 이상 성인 남녀 1,000명
○오차 범위 : 95 % 신뢰수준, 오차 범위 ±3.1 %
○조사 의뢰 : 한국원자력문화재단

이 조사에서 응답자 1000명 중 67.5 %가 '원자력 발전 비중을 늘려야 한다.' 에 찬성하였다. 여기서 신뢰수준이 95 %이고, 오차 범위가 ±3.1 %이므로 전체 국민의 67.5±3.1 (%), 즉 64.4 %~70.6 %가 '원자력 발전 비중을 늘려야 한다.' 에 찬성한다고 해석할 수 있다.

이때, 신뢰수준 95 %의 뜻은 표본을 달리하여 이러한 조사를 100번 하더라도 95번 정도는 비슷한 결과가 나온다는 의미이다.

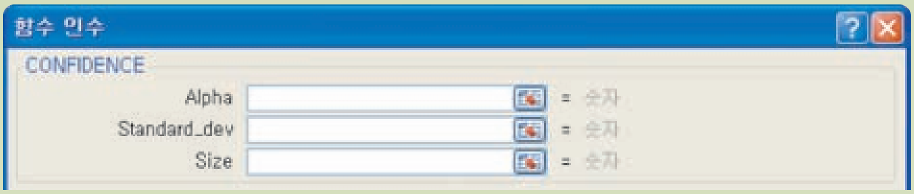
이 조사에서 모비율의 신뢰도 95 %인 신뢰구간은 [64.4 %, 70.6 %]이다.

이때, 오차 범위 3.1 %는 $1.96\sqrt{\dfrac{50\times50}{1000}}$ %를 계산한 값으로 오차의 최대 허용 범위이다.

컴퓨터 프로그램을 이용한 모비율의 신뢰구간 추정

❶ 메뉴에서 [수식] – [함수 삽입] 을 택하고 CONFIDENCE 함수를 선택하면 다음과 같은 대화 상자가 나타난다.

❷ Alpha에 {1−(신뢰도)}, Standard_dev에 표준편차 $\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$, Size에 표본의 크기 n을 입력하면 신뢰구간의 계산에 필요한 값을 구하여 준다. 이를테면 Alpha에 0.05를 입력하면 $1.96\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$의 값을 계산해 준다.



함 께 하 기 /

익힘책 133쪽 | 익힘책 134쪽 | 익힘책 135쪽

1 어느 지방 자치 단체에서 새롭게 개발한 정책을 시행하기에 앞서 이 정책에 대한 주민의 선호도를 조사하기로 하였다. 지역 주민 400명을 임의추출하여 이 정책에 대한 선호도를 조사하였더니, 220명이 찬성한다고 응답하였다. 전체 주민의 몇 %가 이 정책을 찬성할 것인지를 신뢰도 95 %인 신뢰구간으로 추정하여라. (단, 소수 넷째 자리에서 반올림한다.)

풀이

표본비율 $\hat{p}=\dfrac{220}{400}=0.55$이고, $n=400$은 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$의 분포는 근사적으로 정규분포를 따른다.

$$\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}=0.55-1.96\sqrt{\frac{0.55\times0.45}{400}}$$
$$\fallingdotseq 0.55-0.049=0.501$$
$$\hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}=0.55+1.96\sqrt{\frac{0.55\times0.45}{400}}$$
$$\fallingdotseq 0.55+0.049=0.599$$

이므로 모비율 p에 대하여 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$$0.501\le p\le 0.599$$

즉, 신뢰도 95 %로 추정하였을 때 전체 주민의 **50.1 %~59.9 %**가 이 정책을 찬성할 것으로 추정된다.

스 스 로 하 기 /

익힘책 133쪽 | 익힘책 134쪽 | 익힘책 135쪽

1 어느 주차장에 주차된 승용차 중 100대를 임의추출하여 조사해 보니 그 중 흰색 차량은 36대라고 한다. 이 지역에서 운행되는 전체 승용차 중 흰색 차량의 비율에 대하여 신뢰도 99 %인 신뢰구간을 구하여라.

2 어느 지역의 실업률을 조사하기 위하여 이 지역의 주민 중 1600명을 임의추출하였다. 이 중에서 96명이 실업자라고 할 때, 이 지역의 실업률에 대하여 신뢰도 95 %인 신뢰구간을 구하여라.

(단, 소수 넷째 자리에서 반올림한다.)

중단원 확인하기

새로 나온 용어와 기호: 모집단, 전수조사, 표본, 표본조사, 임의추출, 모평균, 모분산, 모표준편차, 표본평균, 표본분산, 표본표준편차, 추정, 신뢰도, 신뢰구간, 모비율, 표본비율, $\overline{X}$, $\hat{p}$

모집단과 표본

의사소통

1 다음 각 경우의 예를 하나씩 들어라.

(1) 전수조사를 해야 하는 경우

(2) 표본조사를 해야 하는 경우

표본평균의 분포

계산

2 어느 지역의 가구당 월 소득은 평균이 3000000원, 표준편차가 500000원인 정규분포를 따른다고 한다. 이 중에서 25가구를 임의추출할 때, 월 소득의 표본평균 $\overline{X}$에 대하여 다음 확률을 구하여라.

(1) $\mathrm{P}(\overline{X} \leq 2800000)$　　(2) $\mathrm{P}(2700000 \leq \overline{X} \leq 3200000)$

모평균의 추정

문제 해결

3 어떤 화훼 농가에서 생산하는 꽃의 개화 시간은 표준편차가 10시간인 정규분포를 따른다고 한다. 이 농가에서 생산한 꽃 100송이의 개화 시간을 조사하였더니 표본평균이 96시간이었다. 이 농가에서 생산하는 꽃의 평균 개화 시간에 대하여 신뢰도 99 %인 신뢰구간을 구하여라.

모비율의 추정

문제 해결

4 어느 회사에서 신제품을 시장에 내놓기에 앞서 이 제품의 선호도를 조사하기로 하였다. 임의추출된 625명에게 신제품의 선호도를 조사하였더니 375명이 좋다고 응답하였다. 전체 국민의 몇 %가 이 신제품을 선호할 것인지를 신뢰도 95 %인 신뢰구간으로 추정하여라.

(단, 소수 넷째 자리에서 반올림한다.)

표본 크기의 결정

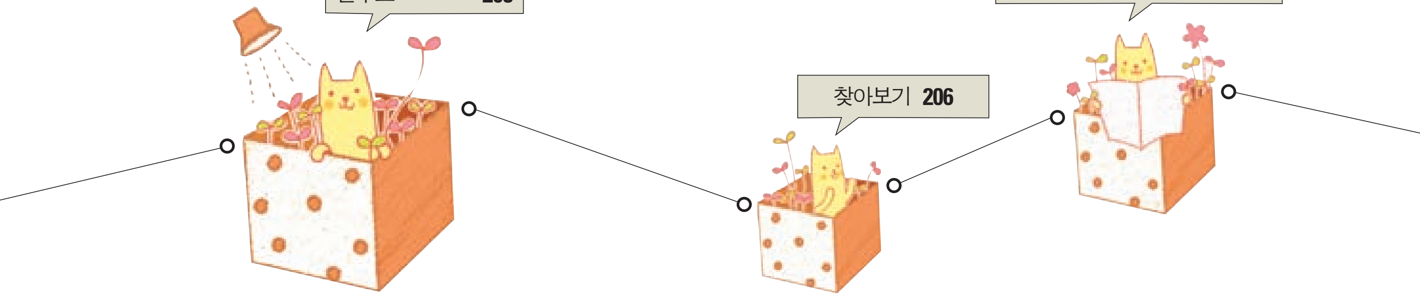
이해

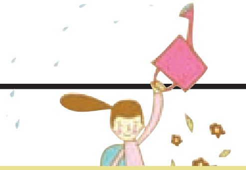
5 어떤 테이프의 길이는 표준편차가 6.2 cm인 정규분포를 따른다고 한다. 테이프의 길이의 평균에 대하여 신뢰도 95 %인 신뢰구간을 구할 때, 신뢰구간의 폭을 2 cm 이내로 하려면 표본의 크기를 얼마 이상으로 해야 하는가?

적분과 통계 교과서

정답과 풀이 182

부록





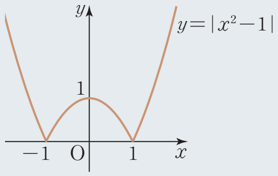
Ⅰ. 적분법

단원을 시작하기 전에 P.10

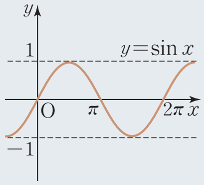
1 (1) $a=1,\ b=-1$

(2) $a=\frac{1}{2},\ b=-\frac{1}{2}$

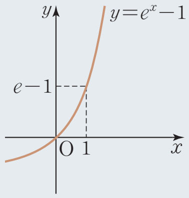
2 (1)



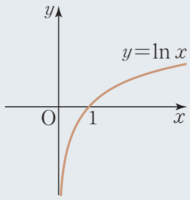
(2)



(3)



(4)



3 (1) $\frac{24}{25}$ (2) $-\frac{1}{8}$

4 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{3}$

5 (1) $y'=3x^2+10x$

(2) $y'=e^x$

(3) $y'=\frac{1}{x}-2x$

(4) $y'=\cos^2 x-\sin^2 x$

(5) $y'=24x(3x^2-5)^3$

(6) $y'=n\sin^{n-1}x\cos x$

1. 부정적분

1. 부정적분의 뜻과 여러 가지 함수의 부정적분

01. 부정적분의 뜻과 성질

탐구하기 / P. 13

(위에서부터 차례로) x^6, x^n, $3x^2$, $4x^3$

스스로 하기 / P. 14, 15

1 (1) x^3+C

(2) x^5+C

2 (1) $f(x)=3$

(2) $f(x)=6x+4$

(3) $f(x)=3x^2-4x$

(4) $f(x)=x^3+x^2+2$

3 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 부정적분을 각각 $F(x)$, $G(x)$라고 하면

$F(x)=\int f(x)dx$

$F'(x)=f(x)$

$G(x)=\int g(x)dx$

$G'(x)=g(x)$

가 성립한다. 또

$$\{F(x)-G(x)\}'=F'(x)-G'(x)$$
$$=f(x)-g(x)$$

이므로

$$F(x)-G(x)=\int\{f(x)-g(x)\}dx$$

이때, $F(x)=\int f(x)dx$, $G(x)=\int g(x)dx$

이므로

$$\int\{f(x)-g(x)\}dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$$

02. 다항함수의 부정적분

탐구하기 / P. 16

(위에서부터 차례로) $\frac{1}{5}x^5$, x^2, x^3, x^n

스스로 하기 / P. 16, 17

1 (1) $\frac{1}{4}x^4+C$

(2) $\frac{1}{5}x^5+C$

(3) $\frac{1}{7}x^7+C$

2 (1) $2x^3+x^2-3x+C$

(2) $\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-x+C$

3 $F(x)=-x^3+2x^2-2x+1$

03. 함수 $y=x^n$ (n은 실수)의 부정적분

탐구하기 / P. 18

$\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x}$

스스로 하기 / P. 18

1 (1) $-\frac{1}{x}+C$

(2) $3\ln|x|+C$

(3) $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$

04. 삼각함수의 부정적분

스스로 하기 / P. 19

1 (1) $-\cos x+3\sin x+C$

(2) $\tan x-x+C$

(3) $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin x+C$

(4) $-\cos x-2\cot x+C$

05. 지수함수의 부정적분

탐구하기 / P. 20

e^x, $2^x\ln 2$, $3^x\ln 3$

스스로 하기 / P. 20

1 (1) $e^x+\cos x+C$

(2) $\frac{2^x}{\ln 2}-3\ln|x|+C$

(3) $e^{x-1}+\frac{3^{x+2}}{\ln 3}+C$

(4) $\frac{3^{2x}}{2\ln 3}+\frac{2\cdot 3^x}{\ln 3}+x+C$

2. 치환적분법과 부분적분법

01. 치환적분법

탐구하기 / P. 22

1 $\frac{4}{3}x^3+2x^2+x+C$

2 $2x^4+4x^3+3x^2+x+C$

스스로 하기 / P. 23, 24, 25

1 (1) $\frac{1}{18}(3x-1)^6+C$

(2) $-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)+C$

(3) $\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}\sin 6x+C$

(4) $\frac{1}{15}(3x+1)(2x-1)\sqrt{1-2x}+C$

(5) $e^{x^2}+C$

(6) $\frac{1}{3}\sin^3 x+C$

2 (1) $\ln|x^3-2x+3|+C$ (2) $\ln|e^x-1|+C$

(3) $-\ln|\cos x|+C$ (4) $\ln|\ln x|+C$

3 (1) $x^2-5x+\ln|x+1|+C$

(2) $\frac{1}{4}\ln|x+3|+\frac{3}{4}\ln|x-1|+C$

02. 부분적분법

탐구하기 / P. 26

$(1+x)e^x$, $\sin x+x\cos x$, $\ln x+1$

스스로 하기 / P. 27

1 (1) $\left(x-\frac{1}{3}\right)e^{3x}+C$

(2) $-2x\cos x+2\sin x+C$

(3) $\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$

(4) $2x\ln(2x+3)-2x+3\ln(2x+3)+C$

2 (1) $-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$

(2) $x(\ln x)^2-2x\ln x+2x+C$

중단원 확인하기 P. 28

1 (1) $\int(x+1)(x+2)dx$

$=\int(x^2+3x+2)dx$

$=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+2x+C$

(2) $\int\frac{x^2-2x-1}{x^3}dx$

$=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)dx$

$=\ln|x|+\frac{2}{x}+\frac{1}{2x^2}+C$

(3) $\int\frac{2x^2-3}{x^2}dx$

$=\int\left(2-\frac{3}{x^2}\right)dx$

$=2x+\frac{3}{x}+C$

(4) $\int\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}dx$

$=\int\frac{x^2-2x+1}{x^{\frac{1}{2}}}dx$

$=\int(x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})dx$

$=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+C$

2 (1) $-2\cos x-\sin x+C$

(2) $\frac{2^x}{\ln 2}-x+C$

(3) $3e^x-\frac{2^x}{\ln 2}+C$

(4) (주어진 식)$=\tan x-\int\frac{1+\cos 2x}{2}dx$

$=\tan x-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$

3 (1) $2x-5=t$로 놓으면

$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}$

$\therefore \int(2x-5)^4dx$

$=\int t^4\cdot\frac{1}{2}dt$

$=\frac{1}{10}t^5+C$

$=\frac{1}{10}(2x-5)^5+C$

(2) $\sqrt{3x-2}=t$로 놓으면 $x=\frac{t^2+2}{3}$이므로

$\frac{dx}{dt}=\frac{2}{3}t$

$\therefore \int x\sqrt{3x-2}\,dx$

$=\int\frac{1}{3}(t^2+2)\cdot t\cdot\frac{2}{3}t\,dt$

$=\int\left(\frac{2}{9}t^4+\frac{4}{9}t^2\right)dt$

$=\frac{2}{45}t^5+\frac{4}{27}t^3+C$

$=\frac{2}{135}t^3(3t^2+10)+C$

$=\frac{2}{135}(9x+4)(3x-2)\sqrt{3x-2}+C$

4 (1) $f(x)=x,\ g'(x)=e^{2x}$으로 놓으면

$f'(x)=1,\ g(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$

$\therefore \int xe^{2x}dx$

$=x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}-\int\frac{1}{2}e^{2x}dx$

$=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C$

$=\frac{1}{4}(2x-1)e^{2x}+C$

(2) $f(x)=2x+1,\ g'(x)=\cos x$로 놓으면

$f'(x)=2,\ g(x)=\sin x$

$$\therefore \int (2x+1)\cos x\,dx$$
$$=(2x+1)\sin x-\int 2\sin x\,dx$$
$$=(2x+1)\sin x+2\cos x+C$$

5 $x(t)=\int x'(t)dt$
$$=-\int 20\cdot e^{-\frac{t}{5}}dt$$
$$=-20\cdot(-5)e^{-\frac{t}{5}}+C$$
$$=100e^{-\frac{t}{5}}+C$$
$x(0)=100+C=100$에서 $C=0$
$\therefore x(5)=100e^{-1}$
$$=\frac{100}{e}\ (\mathrm{dB})$$

2. 정적분

1. 정적분의 뜻과 성질

01. 구분구적법

탐구하기 / P. 31

1

구분	그림 1	그림 2	그림 3
a	1	13	72
b	13	36	120

2

구분	그림 1	그림 2	그림 3
S	1	3.25	4.5
T	13	9	7.5
$T-S$	12	5.75	3

3 $T-S$의 값은 점점 작아지면서 0에 가까워진다.

스스로 하기 / P. 33, 34

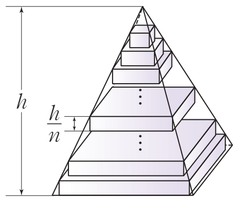
1 (1) $0,\ \frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \cdots,\ \frac{n-1}{n},\ \frac{n}{n}\ (=1)$

(2) $0,\ \left(\frac{1}{n}\right)^3,\ \left(\frac{2}{n}\right)^3,\ \cdots,\ \left(\frac{n-1}{n}\right)^3,\ \left(\frac{n}{n}\right)^3$

(3) $\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$

(4) $\frac{1}{4}$

2 오른쪽 그림과 같이 사각뿔의 높이를 n등분하고, 각 분점을 지나고 밑면에 평행한 평면으로 $(n-1)$개의 직육면체를 만든다.



이때, k번째 직육면체의 밑넓이를 S_k라고 하면
$S_k : S=k^2 : n^2$에서
$$S_k=\left(\frac{k}{n}\right)^2 S$$
높이가 $\frac{h}{n}$인 $(n-1)$개의 직육면체의 부피의 합을 V_n이라고 하면
$$V_n=\frac{h}{n}\left\{S\left(\frac{1}{n}\right)^2+S\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+S\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right\}$$
$$=hS\cdot\frac{1}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$
$$\therefore V=\lim_{n\to\infty}V_n$$
$$=\frac{1}{3}hS$$

02. 정적분

탐구하기 / P. 35

순서 \ k	0	1	2	3	4	합
1. x_k	1	1.5	2	2.5	3	
2. $f(x_k)$		13.75	12	9.75	7	
3. $(x_k-x_{k-1})f(x_k)$		6.875	6	4.875	3.5	21.25

스스로 하기 / P. 37

1 (1) 4 (2) $\frac{22}{3}$

03. 정적분의 기본 정리

스스로 하기 / P. 40

1 $f(x)=2x-2$
$a=4$

2 (1) 2 (2) 3
(3) 25 (4) -2

04. 정적분의 성질

스스로 하기 / P. 42, 43

1 (1) $\frac{50}{3}$

(2) -12

2 (1) $\frac{8}{3}$

(2) $\frac{1}{2}(e^6-e^{-6})+4-\frac{1}{2}(e^2-e^{-2})$

(3) $\frac{39}{2}$

(4) $\frac{3}{2}+\ln 2$

3 (1) $\frac{9}{2}$

(2) $\frac{23}{3}$

(3) $4\ln 2+e-5$

(4) 2

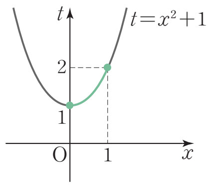
2. 정적분의 치환적분법과 부분적분법

01. 정적분의 치환적분법

탐구하기 / P. 45

1 $x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=2$

2



3 $\frac{dt}{dx}=2x$, $x\,dx=\frac{1}{2}dt$

4 $\int_1^2 t^{10}\,dt$

스스로 하기 / P. 46, 47

1 (1) $\frac{121}{5}$

(2) $\frac{21}{4}$

(3) $\frac{19}{15}$

(4) $\frac{1}{2}(e^4-1)$

(5) 2

(6) $\frac{1}{2}\ln 3$

2 (1) $\frac{1}{3}$

(2) $\frac{1}{4}$

(3) $\frac{2}{3}$

(4) $\frac{1}{2}\ln 2$

(5) $\frac{1}{2}$

(6) $2\ln 2$

02. 정적분의 부분적분법

스스로 하기 / P. 48

1 (1) 1

(2) 1

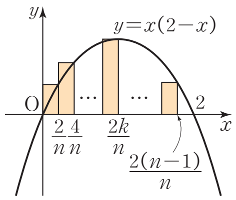
(3) $e-2$

(4) $\pi-2$

중단원 확인하기 P. 50

1 구간 $[0,\ 2]$를 n등분하면 양 끝점과 각 분점의 x좌표는 차례로

$0,\ \frac{2}{n},\ \frac{4}{n},\ \cdots,\ \frac{2k}{n},\ \cdots,\ \frac{2n}{n}$



구간 $[x_{k-1},\ x_k]\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$의 길이는 $\frac{2}{n}$이므로 k번째 직사각형의 넓이는

$\frac{2}{n}\left\{2\left(\frac{2k}{n}\right)-\left(\frac{2k}{n}\right)^2\right\}$

따라서 구하는 값은

$$\int_0^2 x(2-x)dx$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}\left\{2\left(\frac{2k}{n}\right)-\left(\frac{2k}{n}\right)^2\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{8k}{n^2}-\frac{8k^2}{n^3}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$
$$-\lim_{n\to\infty}\frac{8}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$=\frac{4}{3}$$

2 (1) $\int_1^2\frac{1}{x(x+1)}dx$

$$=\int_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=\Big[\ln|x|-\ln|x+1|\Big]_1^2$$
$$=(\ln 2-\ln 3)-(\ln 1-\ln 2)$$
$$=2\ln 2-\ln 3$$
$$=\ln\frac{4}{3}$$

(2) $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}dx$

$$=\int_0^1(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})dx$$
$$=\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$
$$=\left(\frac{2}{3}\cdot 2^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\right)-\frac{2}{3}$$
$$=\frac{4}{3}\sqrt{2}-\frac{4}{3}$$
$$=\frac{4}{3}(\sqrt{2}-1)$$

(3) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,dx$

$$=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=-\frac{1}{2}\cdot(-1)+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{4}$$

(4) $\int_0^{\ln 2}(e^x-e^{-x})^2dx$

$$=\int_0^{\ln 2}(e^{2x}-2+e^{-2x})dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}e^{2x}-2x-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^{\ln 2}$$
$$=\left(\frac{1}{2}\cdot 4-2\ln 2-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{2}-0-\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{15}{8}-2\ln 2$$

3 (1) $f(x)=|x+1|$로 놓으면

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & (x\ge -1)\\ -x-1 & (x\le -1)\end{cases}$$

이므로 구간을 나누어 계산하면

$$\int_{-2}^{2}|x+1|dx$$
$$=\int_{-2}^{-1}(-x-1)dx+\int_{-1}^{2}(x+1)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}x^2-x\right]_{-2}^{-1}+\left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-1}^{2}$$
$$=5$$

(2) $f(x)=|x^2-1|$로 놓으면

$$f(x)=\begin{cases}x^2-1 & (x\le -1\ \text{또는}\ x\ge 1)\\ -x^2+1 & (-1\le x\le 1)\end{cases}$$

이므로 구간을 나누어 계산하면

$$\int_{-1}^{1}|x^2-1|dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(-x^2+1)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_{-1}^{1}$$
$$=\frac{4}{3}$$

(3) $\sin x-\frac{1}{2}=0$에서

$x=\frac{\pi}{6}$

$0\le x\le\frac{\pi}{6}$일 때

$\left|\sin x-\frac{1}{2}\right|=-\sin x+\frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{2}$일 때

$\left|\sin x - \frac{1}{2}\right| = \sin x - \frac{1}{2}$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\sin x - \frac{1}{2}\right| dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(-\sin x + \frac{1}{2}\right) dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x - \frac{1}{2}\right) dx$

$= \left[\cos x + \frac{1}{2}x\right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \left[-\cos x - \frac{1}{2}x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= \left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12}\right) - 1\right\}$

$\quad + \left\{\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12}\right)\right\}$

$= -\frac{\pi}{12} + \sqrt{3} - 1$

(4) $f(x) = |2^x - 2|$로 놓으면

$f(x) = \begin{cases} 2^x - 2 & (x \ge 1) \\ -2^x + 2 & (x \le 1) \end{cases}$

이므로 구간을 나누어 계산하면

$\int_0^2 |2^x - 2| dx$

$= \int_0^1 (-2^x + 2) dx + \int_1^2 (2^x - 2) dx$

$= \left[-\frac{2^x}{\ln 2} + 2x\right]_0^1 + \left[\frac{2^x}{\ln 2} - 2x\right]_1^2$

$= \left\{\left(-\frac{2}{\ln 2} + 2\right) + \frac{1}{\ln 2}\right\}$

$\quad + \left\{\left(\frac{4}{\ln 2} - 4\right) - \left(\frac{2}{\ln 2} - 2\right)\right\}$

$= \frac{1}{\ln 2}$

4 (1) $x^2 + 1 = t$로 놓으면

$2x\frac{dx}{dt} = 1$

또 $0 \le x \le 3$에서 x의 값과 t의 값은 일대일 대응이고 $x=0$일 때 $t=1$, $x=3$일 때 $t=10$이므로

$\int_0^3 \frac{x}{x^2+1} dx$

$= \int_1^{10} \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{2} dt$

$= \left[\frac{1}{2} \ln |t|\right]_1^{10}$

$= \frac{1}{2} \ln 10$

(2) $f(x) = x$, $g'(x) = e^x$으로 놓으면

$f'(x) = 1$, $g(x) = e^x$

$\therefore \int_0^1 xe^x dx$

$= \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx$

$= e - \left[e^x\right]_0^1$

$= e - (e - 1)$

$= 1$

5 7년 동안 유지, 보수하는 데 드는 비용은 0부터 7까지의 평균 증가율 $M(t)$를 적분한 값이므로

$\int_0^7 M(t) dt$

$= \int_0^7 (1.2t + 1.2^t \ln 1.2) dt$

$= \left[0.6t^2 + 1.2^t\right]_0^7$

$\fallingdotseq 29.4 + 3.6 - 1 = 32$

따라서 구입한 지 7년 동안 유지, 보수하는 데 드는 비용은 약 3200만 원이다.

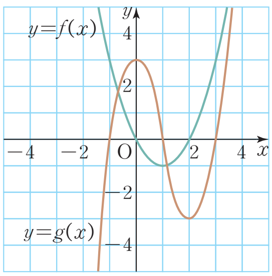
3. 정적분의 활용

1. 도형의 넓이

01. 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이

탐구하기 / P. 53

1



2 $f(x)$: $x \le 0$ 또는 $x \ge 2$

$g(x)$: $-1 \le x \le 1$ 또는 $x \ge 3$

스스로 하기 / P. 54

1 (1) $\frac{148}{3}$ (2) 1

02. 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이

스스로 하기 / P. 56

1 (1) $\frac{9}{2}$

(2) 9

(3) $4\ln 2-2$

03. 곡선과 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이

스스로 하기 / P. 57

1 $e-\frac{1}{e}$

2 (1) $\frac{4}{3}$

(2) $\frac{1}{2}\ln 5$

2. 도형의 부피

01. 입체도형의 부피

탐구하기 / P. 60

$x^2 : S(x)=4^2 : 24$

$\therefore S(x)=\frac{3}{2}x^2$

스스로 하기 / P. 61

1 16 cm^3

2 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

02. 회전체의 부피

스스로 하기 / P. 63, 64

1 $\frac{\pi^2}{2}$

2 (1) 8π (2) $(e-2)\pi$

3 $\frac{1}{2}\pi$

3. 속도와 거리

01. 수직선 위에서의 속도와 거리

탐구하기 / P. 66

t^3-t^2

스스로 하기 / P. 68

1 (1) $-t^3+96t^2+120t$

(2) 63000 m

2 (1) $\frac{1}{2}\cos 2t-\cos t+\frac{3}{2}$

(2) $\frac{5}{2}$

02. 평면 위에서의 속도와 거리

스스로 하기 / P. 70

1 $\frac{14}{3}$

2 $\frac{4}{3}$

03. 곡선의 길이

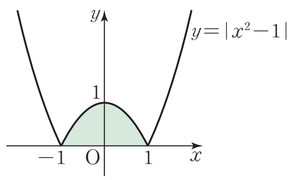
스스로 하기 / P. 72

1 $e-\frac{1}{e}$

2 $2\sqrt{3}-\frac{2}{3}$

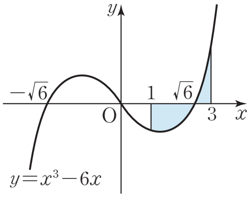
중단원 확인하기 P. 73

1 (1)



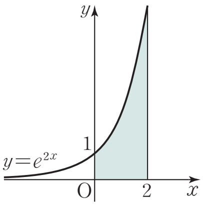
$$\int_{-1}^{1}|x^2-1|\,dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(-x^2+1)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_{-1}^{1}$$
$$=\left(-\frac{1}{3}+1\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right)$$
$$=\frac{4}{3}$$

(2)



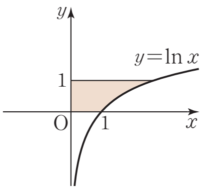
$$\int_{1}^{3}|x^3-6x|\,dx$$
$$=\int_{1}^{\sqrt{6}}(-x^3+6x)\,dx+\int_{\sqrt{6}}^{3}(x^3-6x)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+3x^2\right]_{1}^{\sqrt{6}}+\left[\frac{1}{4}x^4-3x^2\right]_{\sqrt{6}}^{3}$$
$$=(-9+18)-\left(-\frac{1}{4}+3\right)+\left(\frac{81}{4}-27\right)$$
$$-(9-18)$$
$$=\frac{17}{2}$$

(3)



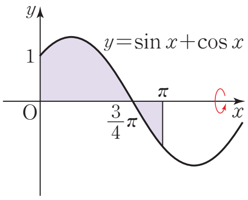
$$\int_{0}^{2}|e^{2x}|\,dx$$
$$=\int_{0}^{2}e^{2x}\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{0}^{2}$$
$$=\frac{1}{2}(e^4-1)$$

(4)



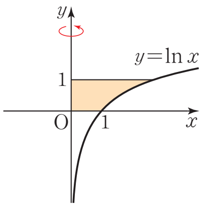
$$\int_{0}^{1}e^y\,dy=\left[e^y\right]_{0}^{1}$$
$$=e-1$$

2 (1)



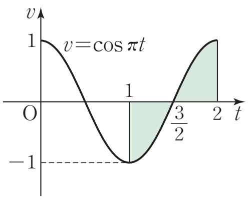
$$V=\pi\int_{0}^{\pi}y^2\,dx$$
$$=\pi\int_{0}^{\pi}(\sin x+\cos x)^2\,dx$$
$$=\pi\int_{0}^{\pi}(1+2\sin x\cos x)\,dx$$
$$=\pi\int_{0}^{\pi}(1+\sin 2x)\,dx$$
$$=\pi\left[x-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{0}^{\pi}$$
$$=\pi\left\{\left(\pi-\frac{1}{2}\right)-\left(0-\frac{1}{2}\right)\right\}$$
$$=\pi^2$$

(2)



$$V=\pi\int_{0}^{1}x^2\,dy$$
$$=\pi\int_{0}^{1}e^{2y}\,dy$$
$$=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2y}\right]_{0}^{1}$$
$$=\frac{1}{2}\pi(e^2-1)$$

3 (1)



$$\int_1^2 |\cos \pi t|\,dt$$

$$=\int_1^{\frac{3}{2}}(-\cos \pi t)dt+\int_{\frac{3}{2}}^2 \cos \pi t\,dt$$

$$=\left[-\frac{1}{\pi}\sin \pi t\right]_1^{\frac{3}{2}}+\left[\frac{1}{\pi}\sin \pi t\right]_{\frac{3}{2}}^2$$

$$=-\frac{1}{\pi}(-1-0)+\frac{1}{\pi}\{0-(-1)\}$$

$$=\frac{2}{\pi}$$

(2) $\frac{dx}{dt}=e^t(\cos t-\sin t)$

$\frac{dy}{dt}=e^t(-\sin t-\cos t)$

이므로 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^2 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$=\int_0^2 \sqrt{e^{2t}(\cos t-\sin t)^2+e^{2t}(\cos t+\sin t)^2}\,dt$$

$$=\int_0^2 \sqrt{2e^{2t}}\,dt$$

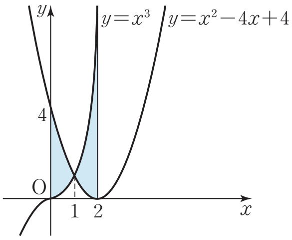
$$=\int_0^2 \sqrt{2}e^t\,dt=\sqrt{2}\left[e^t\right]_0^2$$

$$=\sqrt{2}(e^2-1)$$

4 (1) $y=x^3$과 $y=x^2-4x+4$의 교점의 x좌표는

$x^3=x^2-4x+4$에서

$x=1$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^2 |x^3-(x^2-4x+4)|\,dx$$

$$=\int_0^1 (-x^3+x^2-4x+4)dx$$

$$+\int_1^2 (x^3-x^2+4x-4)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_0^1$$

$$+\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+2x^2-4x\right]_1^2$$

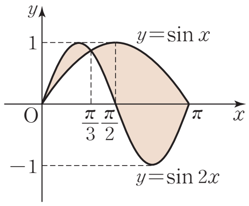
$$=\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-2+4\right)+\left(4-\frac{8}{3}+8-8\right)$$

$$-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+2-4\right)$$

$$=\frac{11}{2}$$

(2) $0\le x\le \pi$에서 $y=\sin x$와 $y=\sin 2x$의 교점의 x좌표는 $\sin x=\sin 2x$에서

$x=0,\ x=\frac{\pi}{3},\ x=\pi$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^{\pi} |\sin x-\sin 2x|\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(-\sin x+\sin 2x)dx$$

$$+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(\sin x-\sin 2x)dx$$

$$=\left[\cos x-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$+\left[-\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$$

$$=\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}-\left(1-\frac{1}{2}\right)$$

$$+\left\{-(-1)+\frac{1}{2}\right\}-\left\{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$=\frac{5}{2}$$

5 $V=\int_0^{20} \ln(x+1)dx$

$x+1=t$로 놓으면

$\frac{dx}{dt}=1$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=20$일 때 $t=21$이므로

$$V=\int_1^{21} \ln t\,dt$$

$$=\left[t\ln t\right]_1^{21}-\int_1^{21} t\cdot\frac{1}{t}\,dt$$

$$=(21\ln 21-0)-(21-1)$$

$$=21\ln 21-20\ (\text{cm}^3)$$

Ⅱ. 순열과 조합

단원을 시작하기 전에 P. 76

1 (1) 9개 (2) 12개
(3) 12개 (4) 24개

2 (1) 9가지 (2) 18가지

3 (1) $a^2+2ab+b^2$
(2) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

4 (1) 56 (2) 28

5 (1) 5040일 (2) 20개

1. 순열, 조합과 이항정리

1. 중복순열과 원순열

01. 중복순열

탐구하기 / P. 79

1 9개

2 243개

스스로 하기 / P. 79

1 100개

02. 원순열

스스로 하기 / P. 80

1 (1) 120가지 (2) 12가지

03. 같은 것이 있는 순열

스스로 하기 / P. 82

1 (1) 180가지
(2) 420가지
(3) 50400가지

2 2520가지

3 (1) 60가지
(2) 66가지

2. 중복조합

01. 중복조합의 뜻

탐구하기 / P. 84

1 3가지

2 3가지

스스로 하기 / P. 84

1 {1, 1}, {1, 2}, {1, 3}
{2, 2}, {2, 3}, {3, 3}

02. 중복조합의 수

스스로 하기 / P. 85

1 15가지

2 (1) 5개 (2) 10개

3. 이항정리

01. 이항정리의 뜻

탐구하기 / P. 88

1 3

2 ${}_3C_1$(또는 ${}_3C_2$)

3 ${}_3C_0$, ${}_3C_2$, ${}_3C_3$(또는 ${}_3C_3$, ${}_3C_1$, ${}_3C_0$)

스스로 하기 / P. 89, 90

1 (1) $a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$
(2) $16a^4+32a^3b+24a^2b^2+8ab^3+b^4$
(3) $a^6-6a^5b+15a^4b^2-20a^3b^3+15a^2b^4$
$-6ab^5+b^6$
(4) $16a^4-96a^3b+216a^2b^2-216ab^3+81b^4$

2 (1) $n=4$, $r=2$

(2) $n=9$, $r=3$

3 (1) $x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6$

(2) $x^5-10x^4y+40x^3y^2-80x^2y^3+80xy^4-32y^5$

02. 이항정리의 성질

스스로 하기 / P. 91

1 (1) 128 (2) 1024

2 (1) 이항정리에 의하여

$(1+x)^n$

$={}_nC_0+{}_nC_1\,x+{}_nC_2\,x^2+{}_nC_3\,x^3+\cdots+{}_nC_n\,x^n$

이 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$(1-1)^n$

$={}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-{}_nC_3+\cdots+(-1)^n{}_nC_n$

$\therefore\ {}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-{}_nC_3+\cdots+(-1)^n{}_nC_n=0$

(2) 함께하기 **1**에 의하여

${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_{n-1}+{}_nC_n=2^n$ …… ㉠

n이 홀수일 때, (1)에 의하여

${}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-\cdots+{}_nC_{n-1}-{}_nC_n=0$ …… ㉡

(i) ㉠+㉡을 하면

$2({}_nC_0+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_{n-1})=2^n$

$\therefore\ {}_nC_0+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_{n-1}=2^{n-1}$

(ii) ㉠−㉡을 하면

$2({}_nC_1+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n)=2^n$

$\therefore\ {}_nC_1+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^{n-1}$

(i), (ii)에 의하여

${}_nC_0+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_{n-1}={}_nC_1+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n$

$=2^{n-1}$

모둠 학습 P. 92

모둠 과제2

1 ${}_2C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+{}_6C_4+{}_7C_5$

$={}_{7+1}C_5={}_8C_5=56$

2 ${}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2+{}_5C_2+{}_6C_2+{}_7C_2$

$={}_{7+1}C_{2+1}$

$={}_8C_3=56$

중단원 확인하기 P. 93

1 서로 다른 3개에서 6개를 택하는 중복순열이므로

${}_3\Pi_6=3^6=729$(가지)

2 부부를 묶어서 각각 한 사람으로 보면 모두 4명인 경우와 같고, 4명을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(4-1)!=6$(가지)

6가지 각각에 대하여 부부가 서로 자리를 바꿀 수 있으므로 구하는 경우의 수는

$6\times2!\times2!\times2!\times2!=96$(가지)

3 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합이므로

${}_3H_5={}_{3+5-1}C_5$

$=21$(가지)

4 예를 들어 $x+y+z=8$의 한 해 $x=3$, $y=4$, $z=1$은 x를 3개, y를 4개, z를 1개 택한 것으로 생각하여 보자.

이때, 주어진 조건을 만족하는 정수해의 개수는 서로 다른 3개에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_8={}_{3+8-1}C_8$

$=45$(개)

5 (1) ${}_9C_0+{}_9C_2+{}_9C_4+{}_9C_6+{}_9C_8$

$=2^{9-1}=256$

(2) ${}_{11}C_1+{}_{11}C_3+{}_{11}C_5+{}_{11}C_7+{}_{11}C_9+{}_{11}C_{11}$

$=2^{11-1}=1024$

6 11명 중 n명으로 구성된 소위원회를 만드는 경우의 수는 서로 다른 11개에서 n개를 택하는 조합의 수와 같다. 따라서 2명 이상 5명 이하로 구성된 소위원회를 만드는 경우의 수는 ${}_{11}C_2+{}_{11}C_3+{}_{11}C_4+{}_{11}C_5$이다.

이항정리의 성질에 의하여

${}_{11}C_0+{}_{11}C_1+{}_{11}C_2+\cdots+{}_{11}C_{11}=2^{11}$

여기서 ${}_{11}C_6={}_{11}C_5$, ${}_{11}C_7={}_{11}C_4$, $\cdots$, ${}_{11}C_{11}={}_{11}C_0$이므로

${}_{11}C_0+{}_{11}C_1+{}_{11}C_2+\cdots+{}_{11}C_{11}$

$=2({}_{11}C_0+{}_{11}C_1+{}_{11}C_2+{}_{11}C_3+{}_{11}C_4+{}_{11}C_5)=2^{11}$

${}_{11}C_0+{}_{11}C_1+{}_{11}C_2+{}_{11}C_3+{}_{11}C_4+{}_{11}C_5=2^{10}$

$\therefore\ {}_{11}C_2+{}_{11}C_3+{}_{11}C_4+{}_{11}C_5$

$=2^{10}-{}_{11}C_0-{}_{11}C_1$

$=1024-1-11=1012$(가지)

Ⅲ. 확률

단원을 시작하기 전에 P. 96

1 (1) $A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8\}$
(2) $A\cap B=\{2,\ 4,\ 6\}$
(3) $A-B=\{1,\ 3,\ 5\}$

2 $A^C=\{3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9,\ 10\}$

3 위에서부터 차례로
$15,\ 50,\ 0.28,\ 0.24,\ 1$

4 (1) 64
(2) 36

5 (1) $\frac{1}{2}$
(2) $\frac{1}{3}$

1. 확률의 뜻과 활용

1. 확률의 뜻과 기본 성질

01. 시행의 뜻

탐구하기 / P. 99

ㄴ, ㄷ

스스로 하기 / P. 99

1 $S=\{\mathrm{HH},\ \mathrm{HT},\ \mathrm{TH},\ \mathrm{TT}\}$
$A=\{\mathrm{HT},\ \mathrm{TH}\}$

02. 수학적 확률

탐구하기 / P. 100

1 $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$

2 $2,\ 4,\ 6$

3 $\frac{1}{2}$

스스로 하기 / P. 100, 101

1 $\frac{1}{2}$

2 (1) $\frac{1}{3}$
(2) $\frac{2}{9}$

3 $\frac{21}{40}$

03. 통계적 확률

탐구하기 / P. 102

각자 실험한다.

스스로 하기 / P. 103

1 (1) 0.88
(2) 0.69

2 0.03

04. 확률의 기본 성질

탐구하기 / P. 104

1 0

2 $\frac{2}{3}$

3 1

스스로 하기 / P. 104

1 (1) 1
(2) 0

2. 확률의 계산과 활용

01. 확률의 덧셈정리

탐구하기 / P. 107

1 $A=\{\mathrm{HH}\}$

2 $B=\{TT\}$

3 $C=\{HH,\ HT,\ TH\}$

4 $A\cap B=\varnothing$
$B\cap C=\varnothing$
$A\cap C=\{HH\}$

스스로 하기 / P. 107, 108

1 $\varnothing$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{4,\ 5\}$

2 $\frac{9}{10}$

3 $\frac{1}{5}$

02. 여사건의 확률

스스로 하기 / P. 109

1 $\frac{17}{24}$

중단원 확인하기 P. 110

1 한 개의 주사위를 던지는 시행에서 나올 수 있는 눈의 수는
$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$의 6가지
눈의 수가 6의 약수인 경우는
$1,\ 2,\ 3,\ 6$의 4가지
따라서 구하는 확률은
$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

2 (1) 전체 구슬에서 2개를 동시에 꺼내는 경우의 수는
${}_{10}C_2$가지
노란 구슬 2개를 꺼내는 경우의 수는
${}_{6}C_2$가지
따라서 구하는 확률은
$\frac{{}_{6}C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{1}{3}$
(2) 전체 구슬에서 4개를 동시에 꺼내는 경우의 수는
${}_{10}C_4$가지
노란 구슬 2개, 파란 구슬 2개를 꺼내는 경우의 수는
${}_{6}C_2\times{}_{4}C_2$(가지)
따라서 구하는 확률은
$\frac{{}_{6}C_2\times{}_{4}C_2}{{}_{10}C_4}=\frac{3}{7}$

3 어느 지역 주민 50000명 중 환경 보호 단체의 회원이 625명이므로 이 지역 주민 1명을 택하였을 때, 그 사람이 회원일 통계적 확률은
$\frac{625}{50000}=\frac{1}{80}$

4 한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는
$6\times6=36$(가지)
(1) 두 번 모두 같은 눈의 수가 나올 경우는
$(1,\ 1),\ (2,\ 2),\ \cdots,\ (6,\ 6)$
의 6가지이므로 구하는 확률은
$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$
(2) 두 눈의 수의 합이 4의 배수가 되는 경우는 4 또는 8 또는 12인 경우이다.
(i) 두 눈의 수의 합이 4인 경우는
$(1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$
의 3가지
(ii) 두 눈의 수의 합이 8인 경우는
$(2,\ 6),\ (3,\ 5),\ (4,\ 4),\ (5,\ 3),\ (6,\ 2)$
의 5가지
(iii) 두 눈의 수의 합이 12인 경우는
$(6,\ 6)$
의 1가지
(i), (ii), (iii)에서 두 눈의 수의 합이 4의 배수인 경우의 수는
$3+5+1=9$(가지)
따라서 구하는 확률은
$\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$
(3) 두 눈의 수의 차가 3인 경우는
$(1,\ 4),\ (2,\ 5),\ (3,\ 6),\ (4,\ 1),\ (5,\ 2),\ (6,\ 3)$
의 6가지
따라서 구하는 확률은
$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$
(4) 두 눈의 수의 합이 3 이상인 사건을 A라고 하면

A^C은 두 눈의 수의 합이 3 미만, 즉 두 눈의 수의 합이 2인 사건이다.
두 눈의 수의 합이 2인 경우는 (1, 1)의 1가지이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{36}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$

$=1-\frac{1}{36}$

$=\frac{35}{36}$

5 (1) 전체 10명 중 두 명을 택하는 경우의 수는 ${}_{10}\mathrm{C}_2$가지
A형인 3명 중 두 명을 택하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2$가지
따라서 구하는 확률은

$\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{1}{15}$

(2) 뽑힌 두 명 중 적어도 1명이 A형일 사건을 A라고 하면 A^C은 뽑힌 두 명 모두 A형이 아닌 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_7\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{7}{15}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{7}{15}$

$=\frac{8}{15}$

2. 조건부확률

1. 조건부확률과 확률의 곱셈정리

01. 조건부확률의 뜻

탐구하기 / P. 113

1 $\frac{1}{6}$

2 $\frac{1}{3}$

스스로 하기 / P. 114

1 (1) $\frac{5}{14}$

(2) $\frac{10}{19}$

2 $\frac{2}{5}$

02. 확률의 곱셈정리

스스로 하기 / P. 115

1 $\frac{8}{33}$

03. 사건의 독립과 종속

스스로 하기 / P. 117

1 (1) $A\cap B=\{2\}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}$

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$이므로

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A, B는 서로 독립이다.

(2) $A\cap C=\varnothing$이므로

$\mathrm{P}(A\cap C)=0$

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{1}{2}$이므로

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)=\frac{1}{4}$

$\mathrm{P}(A\cap C)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$이므로 두 사건 A, C는 서로 종속이다.

2 $\frac{1}{6}$

04. 독립시행

스스로 하기 / P. 118

1 $\frac{11}{27}$

중단원 확인하기 P. 119

1 (1) $P(A^C \cup B^C) = P((A \cap B)^C) = 0.7$이므로

$P(A \cap B)$
$= 1 - P((A \cap B)^C)$
$= 1 - 0.7$
$= 0.3$

$\therefore P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0.3}{0.4} = \dfrac{3}{4}$

(2) $P(A^C \cap B^C) = P((A \cup B)^C) = 0.1$이므로

$P(A \cup B) = 1 - P((A \cup B)^C) = 1 - 0.1 = 0.9$

또 $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$
이므로

$P(A \cap B) = 0.8 + 0.2 - 0.9 = 0.1$

$\therefore P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0.1}{0.2} = \dfrac{1}{2}$

2 A가 문제를 맞히는 사건을 A, B가 문제를 맞히는 사건을 B, C가 문제를 맞히는 사건을 C라고 하면 사건 A, B, C는 서로 독립이다.
따라서 구하는 확률은

$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{4} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{4}$

3 한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는
$6 \times 6 = 36$(가지)
두 눈의 수의 합이 소수인 사건 A는
$A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1), (5, 6), (6, 5)\}$
이므로 사건 A의 경우의 수는 15가지이다.
두 눈의 수의 합이 홀수인 사건 B는
$B = \{(1, 2), (2, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1), (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3), (5, 6), (6, 5)\}$
이므로 사건 B의 경우의 수는 18가지이다.
또 두 눈의 수의 합이 소수이면서 홀수인 사건 $A \cap B$는
$A \cap B = \{(1, 2), (2, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1), (5, 6), (6, 5)\}$
이므로 사건 $A \cap B$의 경우의 수는 14가지이다.
각각의 확률을 구하면

$P(A) = \dfrac{15}{36} = \dfrac{5}{12}$

$P(B) = \dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}$

$P(A \cap B) = \dfrac{14}{36} = \dfrac{7}{18}$

이고 $P(A)P(B) = \dfrac{5}{12} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{24}$이다.

따라서 $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$이므로 두 사건 A, B는 서로 종속이다.

4 4문제를 풀면 3문제를 맞히므로 한 문제에 대하여 맞힐 확률은 $\dfrac{3}{4}$이다.
이때, 이 시험에 합격하려면 3문제 이상을 맞혀야 하므로 3문제 또는 4문제 또는 5문제를 맞혀야 한다.

$\therefore {}_5C_3\left(\dfrac{3}{4}\right)^3\left(\dfrac{1}{4}\right)^2 + {}_5C_4\left(\dfrac{3}{4}\right)^4 \cdot \dfrac{1}{4} + {}_5C_5\left(\dfrac{3}{4}\right)^5$

$= 10 \times \dfrac{27}{1024} + 5 \times \dfrac{81}{1024} + \dfrac{243}{1024}$

$= \dfrac{918}{1024} = \dfrac{459}{512}$

5 주어진 조건을 표로 나타내면 다음과 같다.

	상품	중품	합계
상품 판정	540	80	620
중품 판정	60	320	380
합계	600	400	1000

따라서 과일 더미에서 임의로 한 개를 골라 상품이라고 판정하였을 때, 이 과일이 실제로 상품일 확률은

$$\dfrac{\dfrac{600}{1000} \times \dfrac{9}{10}}{\dfrac{600}{1000} \times \dfrac{9}{10} + \dfrac{400}{1000} \times \dfrac{2}{10}} = \dfrac{54}{62} = \dfrac{27}{31}$$

Ⅳ. 통계

단원을 시작하기 전에 P. 122

1 $\frac{3}{8}$

2 (1) 0, 1
(2) 1
(3) 0

3 (1) $\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$
(2) $\sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 p_i$

4 평균: 85
표준편차: $\sqrt{10}$

5 (1) 4
(2) 720

1. 확률분포

1. 확률변수와 확률분포

01. 확률변수의 뜻

탐구하기 / P. 125

THH, HTH, HHT, HHH

스스로 하기 / P. 125

1 0, 1, 2, 3, 4

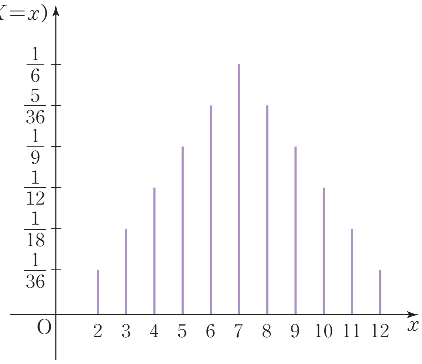
02. 이산확률변수와 확률질량함수

스스로 하기 / P. 127

1 (1) 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	6	7
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$
X	8	9	10	11	12	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$	1

확률분포를 그래프로 나타내면 다음과 같다.



(2) $\frac{5}{12}$ (3) $\frac{35}{36}$

03. 연속확률변수와 확률밀도함수

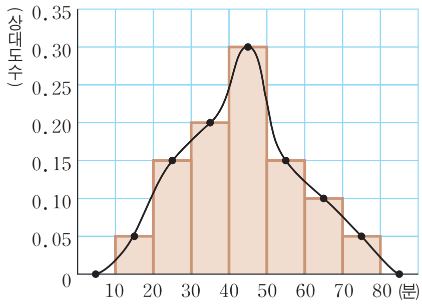
탐구하기 / P. 128

1

계급(분)	도수(명)	상대도수
10이상~20미만	5	0.05
20 ~30	15	0.15
30 ~40	20	0.20
40 ~50	30	0.30
50 ~60	15	0.15
60 ~70	10	0.10
70 ~80	5	0.05
합계	100	1

$0.05+0.15+0.20+0.30+0.15+0.10+0.05=1$

2

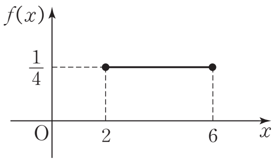


스스로 하기 / P. 130

1 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{7}{8}$

2 (1) $\frac{1}{4}$

(2)



(3) $\frac{1}{2}$

2. 평균과 표준편차

01. 이산확률변수의 평균과 표준편차

탐구하기 / P. 132

게임1을 택한 이유: 손해가 생기는 경우, 그 값이 가장 작다.
게임2를 택한 이유: 이익이 생기는 경우, 그 값이 가장 크다.
게임3을 택한 이유: 평균이 가장 크다.

스스로 하기 / P. 134

1 $\mathrm{E}(X)=0$
$\mathrm{V}(X)=1.1$
$\sigma(X)=\sqrt{1.1}$

2 $\mathrm{E}(X)=\frac{3}{2}$
$\mathrm{V}(X)=\frac{3}{4}$
$\sigma(X)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

02. 연속확률변수의 평균과 표준편차

스스로 하기 / P. 135

1 $\mathrm{E}(X)=\frac{3}{4}$
$\mathrm{V}(X)=\frac{3}{80}$
$\sigma(X)=\frac{\sqrt{15}}{20}$

2 $\mathrm{E}(X)=0$
$\mathrm{V}(X)=\frac{1}{6}$
$\sigma(X)=\frac{\sqrt{6}}{6}$

03. 확률변수 $aX+b$의 평균과 표준편차

탐구하기 / P. 136

1

Y	-1	0	1	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

2 $\mathrm{E}(X)=1$
$\mathrm{E}(Y)=0$
비교: $\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(X)-1$

3

Z	0	2	4	합계
$\mathrm{P}(Z=z)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

4 $\mathrm{V}(X)=\frac{1}{2}$
$\mathrm{V}(Z)=2$
비교: $\mathrm{V}(Z)=4\mathrm{V}(X)$

스스로 하기 / P. 137

1 (1) $\mathrm{E}(X+10)=60$
$\mathrm{V}(X+10)=25$
$\sigma(X+10)=5$
(2) $\mathrm{E}(5X+10)=260$
$\mathrm{V}(5X+10)=625$
$\sigma(5X+10)=25$

2 (1) $\mathrm{E}(T)=50$
$\sigma(T)=10$
(2) 국어 점수: 62점
수학 점수: 70점
비교: 영주는 수학 점수가 국어 점수보다 더 높다.

3. 이항분포

01. 이항분포의 뜻

탐구하기 / P. 141

네 번의 시행에서 1의 눈이 나오는 횟수				
0번	1번	2번	3번	4번
××××	×××○	××○○	×○○○	○○○○
	××○×	×○×○	○×○○	
	×○××	×○○×	○○×○	
	○×××	○××○	○○○×	
		○×○×		
		○○××		

스스로 하기 / P. 142

1 (1) $\mathrm{P}(X=x)={}_4\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^4$ (단, $x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$)

X	0	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	1

(2) $\mathrm{P}(X=x)={}_5\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{5}\right)^x\left(\frac{4}{5}\right)^{5-x}$

(단, $x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$)

X	0	1	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1024}{3125}$	$\frac{256}{625}$	$\frac{128}{625}$	$\frac{32}{625}$	$\frac{4}{625}$	$\frac{1}{3125}$	1

2 0.01142

02. 이항분포의 평균과 표준편차

스스로 하기 / P. 143

1 (1) $\mathrm{E}(X)=32,\ \mathrm{V}(X)=16,\ \sigma(X)=4$
(2) $\mathrm{E}(X)=80,\ \mathrm{V}(X)=64,\ \sigma(X)=8$

2 $\mathrm{E}(X)=18,\ \mathrm{V}(X)=9,\ \sigma(X)=3$

03. 이항분포의 분포표와 그래프

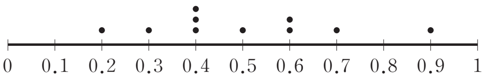
스스로 하기 / P. 144

1 (1) 0.0273 (2) 0.3917 (3) 0.0013

04. 큰 수의 법칙

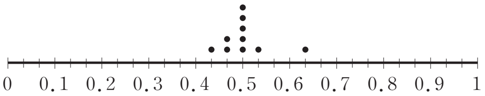
탐구하기 / P. 145

1 답안 예시



2 답안 예시

3 답안 예시



4 던지는 동전의 개수가 10, 20, 30으로 많아짐에 따라 앞면이 나오는 상대도수는 0.5에 밀집됨을 알 수 있다.

스스로 하기 / P. 146

1 0.9455

4. 정규분포

01. 정규분포의 뜻과 정규분포곡선의 성질

탐구하기 / P. 148

1 답안 예시1
곡선 위에 실을 둘러 실의 길이를 측정한다.
답안 예시2
곡선을 구간으로 쪼개어 생긴 각 부분을 직선으로 생각하여 길이를 측정한 후 합한다.

2, 3 각자 실행해 본다.

4 종 모양의 곡선에 가깝다.

02. 표준정규분포

스스로 하기 / P. 150

1 (1) 0.9772 (2) 0.9902
(3) 0.1587 (4) 0.9750

03. 표준화

스스로 하기 / P. 152

1 (1) 0.5 (2) 0.1525
(3) 0.6247 (4) 0.6915

2 (1) 약 63 % (2) 약 3명

04. 이항분포와 정규분포의 관계

스스로 하기 / P. 154

1 (1) 0.4987 (2) 0.0062

중단원 확인하기 P. 156

1

눈	1	2	3	4	5	6
금액	100	200	300	400	500	600
X	-250	-150	-50	50	150	250

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=(-250)\times\frac{1}{6}+(-150)\times\frac{1}{6}\\&\quad+(-50)\times\frac{1}{6}+50\times\frac{1}{6}\\&\quad+150\times\frac{1}{6}+250\times\frac{1}{6}\\&=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X^2)&=(-250)^2\times\frac{1}{6}+(-150)^2\times\frac{1}{6}\\&\quad+(-50)^2\times\frac{1}{6}+50^2\times\frac{1}{6}\\&\quad+150^2\times\frac{1}{6}+250^2\times\frac{1}{6}\\&=\frac{87500}{3}\end{aligned}$$

$$\mathrm{V}(X)=\frac{87500}{3}-0=\frac{87500}{3}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{87500}{3}}=\frac{50\sqrt{105}}{3}$$

따라서 X의 평균은 0, 표준편차는 $\frac{50\sqrt{105}}{3}$이다.

2 (1) $f(x)$는 확률밀도함수이므로

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2 ax\,dx=1$$

$$\left[\frac{a}{2}x^2\right]_0^2=1,\ 2a=1$$

$$\therefore a=\frac{1}{2}$$

(2) $f(x)=\frac{1}{2}x$이므로

$$\mathrm{E}(X)=\int_0^2 x\cdot\frac{1}{2}x\,dx=\left[\frac{1}{6}x^3\right]_0^2=\frac{4}{3}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=\int_0^2 x^2\cdot\frac{1}{2}x\,dx-\left(\frac{4}{3}\right)^2\\&=\left[\frac{1}{8}x^4\right]_0^2-\frac{16}{9}=2-\frac{16}{9}=\frac{2}{9}\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}\mathrm{P}(0.5\le X\le 1.5)&=\int_{0.5}^{1.5}\frac{1}{2}x\,dx\\&=\left[\frac{1}{4}x^2\right]_{0.5}^{1.5}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

3 이 핸드볼 선수의 슛 성공 횟수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}(10,\ 0.6)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=10\times0.6=6$

$\mathrm{V}(X)=10\times0.6\times0.4=2.4$

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{2.4}$

4 이 과수원에서 생산된 포도 한 송이의 무게를 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(168.5,\ 5.5^2)$을 따른다. 따라서 포도 한 송이의 무게가 174 g 이상일 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge174)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{174-168.5}{5.5}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge1)\\&=0.5-0.3413=0.1587\end{aligned}$$

이때, $50\times0.1587=7.935$이므로 포도 50송이 중 무게가 174 g 이상인 것은 약 8송이이다.

5 근시인 학생의 수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(150,\ \frac{2}{5}\right)$를 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=150\times\frac{2}{5}=60$$

$$\sigma(X)=\sqrt{150\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}}=6$$

여기서 $n=150$은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(60,\ 6^2)$을 따른다.

(1) $$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge72)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{72-60}{6}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge2)=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le2)\\&=0.5-0.4772=0.0228\end{aligned}$$

(2) $P(54 \le X \le 72)$

$$=P\left(\frac{54-60}{6} \le Z \le \frac{72-60}{6}\right)$$
$$=P(-1 \le Z \le 2)$$
$$=P(0 \le Z \le 1)+P(0 \le Z \le 2)$$
$$=0.3413+0.4772=0.8185$$

2. 통계적 추정

1. 표본조사와 표본평균의 분포

01. 표본조사

탐구하기 / P. 159

2번, 의견이 골고루 반영될 수 있다.

스스로 하기 / P. 159, 160

1 시간이 절약되고, 경비가 절감된다. 또한 한 번 검사하면 파괴되어서 그 물건을 못 쓰게 되는 검사, 이를테면 전구의 수명 시간에 대한 조사와 같은 경우에도 가능하다.

2 9가지

3 (1) 6가지
(2) 3가지

02. 표본평균의 뜻

스스로 하기 / P. 162

1 표본평균: 5
표본분산: 10
표본표준편차: $\sqrt{10}$

03. 표본평균의 분포

스스로 하기 / P. 164, 165

1 $E(\overline{X})=5$, $\sigma(\overline{X})=\frac{3}{2}$

2 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(6,\ \frac{9}{100}\right)$를 따른다.

3 (1) 0.1587
(2) 0.0228
(3) 0.0013

모둠 학습 **P. 166,167**

모둠 과제1 답안 예시

계산기를 이용하여 10개의 표본을 택하면
173, 176, 173, 169, 155,
169, 191, 176, 172, 158
$E(\overline{X})=171.2$
비교: 표본평균의 값이 모평균의 값과 근사하다.

모둠 과제2, 모둠 과제3, 모둠 과제4

모둠별로 실행해 본다.

2. 모평균과 모비율의 추정

01. 모평균의 추정

탐구하기 / P. 169

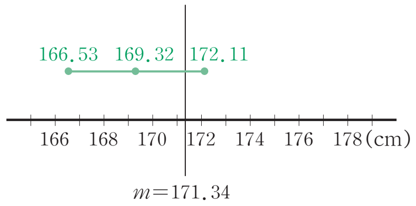
1 $E(\overline{X})=171.34$

$V(\overline{X})=\frac{7.1109^2}{25}$

2 답안 예시

크기 $n=25$인 표본을 택하면
173, 156, 171, 173, 175, 170, 178, 163,
164, 168, 164, 162, 165, 162, 181, 173,
168, 174, 177, 160, 170, 169, 171, 172,
174
$\overline{x}=169.32$

3



4, 5 각자 실행해 본다.

스스로 하기 / P. 171

1 (i) 신뢰도 95 %인 신뢰구간

$58.824 \le m \le 61.176$

(ii) 신뢰도 99 %인 신뢰구간

$58.452 \le m \le 61.548$

2 (1) 신뢰도 95 %인 신뢰구간

$29.9316 \le m \le 31.0684$

(2) 신뢰도 99 %인 신뢰구간

$29.7518 \le m \le 31.2482$

02. 표본비율의 분포

스스로 하기 / P. 173, 175

1 0.004

2 0.1056

3 0.6687

4 0.9544

03. 모비율의 추정

스스로 하기 / P. 178

1 $0.23616 \le p \le 0.48384$

2 $0.048 \le p \le 0.072$

중단원 확인하기 P. 179

1 (1) 우리나라 전체 인구 조사, 선거에서 유권자 확인 등

(2) 가전제품의 수명 시간 조사, 불량품의 비율 조사, 질병에 대한 새로운 치료약 개발 등

2 $m=3000000$, $\sigma=500000$, $n=25$이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(3000000,\ 100000^2)$을 따른다.

(1) $\mathrm{P}(\overline{X} \le 2800000)$

$=\mathrm{P}\left(Z \le \dfrac{2800000-3000000}{100000}\right)$

$=\mathrm{P}(Z \le -2)$

$=\mathrm{P}(Z \ge 2)$

$=0.5-\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$

$=0.5-0.4772=0.0228$

(2) $\mathrm{P}(2700000 \le \overline{X} \le 3200000)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{2700000-3000000}{100000} \le Z \le \dfrac{3200000-3000000}{100000}\right)$

$=\mathrm{P}(-3 \le Z \le 2)$

$=\mathrm{P}(0 \le Z \le 3)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$

$=0.4987+0.4772=0.9759$

3 $n=100$, $\overline{x}=96$, $\sigma=10$이므로 신뢰도 99 %인 신뢰구간은

$96-2.58\dfrac{10}{\sqrt{100}} \le m \le 96+2.58\dfrac{10}{\sqrt{100}}$

$96-2.58 \le m \le 96+2.58$

$\therefore 93.42 \le m \le 98.58$

4 표본비율 $\hat{p}=\dfrac{375}{625}=0.6$이고, $n=625$는 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포를 따른다. 이때

$0.6-1.96\sqrt{\dfrac{0.6\times0.4}{625}} \fallingdotseq 0.562$

$0.6+1.96\sqrt{\dfrac{0.6\times0.4}{625}} \fallingdotseq 0.638$

이므로 모비율 p에 대하여 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$0.562 \le p \le 0.638$

즉, 신뢰도 95 %로 추정하였을 때 전체 국민의 56.2 %~63.8 %가 이 제품을 선호할 것으로 추정된다.

5 $\sigma=6.2$이므로 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$\overline{x}-1.96\dfrac{6.2}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x}+1.96\dfrac{6.2}{\sqrt{n}}$

이때, 신뢰구간의 폭이 2 cm 이내이어야 하므로

$\overline{x}+1.96\dfrac{6.2}{\sqrt{n}}-\left(\overline{x}-1.96\dfrac{6.2}{\sqrt{n}}\right) \le 2$

$2\times1.96\dfrac{6.2}{\sqrt{n}} \le 2$

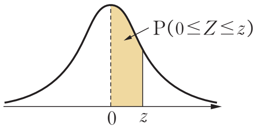
$1.96\dfrac{6.2}{\sqrt{n}} \le 1$

$\sqrt{n} \ge 12.152$

$\therefore n \ge 147.671104$

따라서 표본의 크기를 148 이상으로 해야 한다.

표준정규분포표



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2518	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4980	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4983	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997

난수표

41 10 50 81 22	94 80 71 10 68	23 58 20 21 88	71 29 54 42 84
13 49 57 94 72	78 92 78 78 04	17 00 92 85 09	52 78 15 96 97
33 87 89 24 77	65 37 12 38 63	76 49 69 52 36	11 03 58 23 39
15 91 02 97 10	37 14 47 47 79	81 63 34 22 84	89 77 54 40 37
37 94 89 58 24	29 22 39 42 66	95 14 63 40 46	93 99 89 97 80
48 06 32 88 07	06 19 13 11 04	45 95 73 13 19	11 39 24 24 05
92 65 65 69 32	05 63 75 76 57	26 10 31 31 63	77 83 07 31 14
48 66 49 80 78	34 30 47 61 73	44 31 65 38 69	89 46 83 54 40
23 50 07 82 24	34 88 84 90 39	20 46 32 85 66	22 13 24 41 02
47 02 38 86 81	59 77 46 17 55	54 59 00 99 03	16 34 25 39 50
39 65 34 38 46	26 95 15 80 70	40 06 89 76 54	89 61 27 75 66
90 36 99 74 53	71 05 53 69 01	49 59 53 06 18	52 03 18 40 26
46 60 38 92 08	09 16 06 33 02	13 60 78 83 82	17 16 30 55 71
62 67 74 04 84	75 68 64 11 42	22 88 64 73 77	28 54 94 71 69
21 17 44 02 71	21 59 79 73 18	24 74 77 48 02	32 62 21 14 53
26 28 51 07 60	06 70 82 54 15	47 32 68 27 57	25 93 34 46 17
42 52 33 74 19	92 15 67 44 50	18 71 98 10 65	85 25 63 55 29
01 75 61 32 64	82 26 07 52 58	20 62 50 46 31	25 96 08 42 07
40 43 01 08 73	95 03 72 60 57	11 01 09 16 29	01 43 35 12 89
27 45 34 33 89	67 15 09 44 52	97 29 56 42 65	86 53 36 40 06
70 14 67 62 53	35 13 44 94 15	40 73 62 93 59	85 82 75 98 57
08 19 27 74 15	08 70 74 65 24	48 86 89 31 25	93 37 34 82 89
53 49 10 30 07	77 96 85 15 91	44 39 40 04 22	43 98 84 41 37
52 15 45 85 55	73 68 49 91 91	93 09 46 39 60	04 61 98 28 27
47 08 84 16 05	08 28 75 64 30	96 01 45 66 88	19 99 94 90 85

찾아보기

사진 자료 출처

http://www.topicphoto.com/

49쪽 댐
110쪽 늪지대
120쪽 농업
175쪽 사과나무
94쪽 바다
113쪽 풍물
152쪽 음료수 캔

http://www.imageclick.com/

30쪽 나일강 하류
34쪽 루브르 박물관
76쪽 상품 진열대
115쪽 송편
156쪽 포도나무
178쪽 주차장
31쪽 돌하르방
68쪽 우주선
108쪽 배
142쪽 비행기 내부
165쪽 전구 검사

http://www.timespace.co.kr/

8쪽 컴퓨터 단층 촬영기
74쪽 봉수대

http://www.yonhapnews.co.kr/

52쪽 유조선
78쪽 올림픽 개막식

http://photo.joins.com/

52쪽 태안 앞바다

http://image.newsbank.co.kr/

130쪽 지하철

인용 자료 출처

http://www.kosis.kr/ 국가통계포털, 103쪽, 173쪽
http://www.knef.or.kr/ 한국원자력문화재단, 177쪽
KSA3151난수표 205쪽

※출처를 밝히지 않은 사진 자료의 저작권은 본 출판사에 있다.

지 은 이 약 력

이강섭

서울대학교 사범대학 수학교육과 졸업
서울대학교 대학원 계산통계학과 졸업(이학 박사)
제6차, 제7차 고등학교 수학 교과서 집필(공저)
2006년 개정 교육과정 고등학교 수학 교과서 집필(공저)
단국대학교 기획실장, 사범대학 학장
(현) 단국대학교 사범대학 수학교육과 교수
한국수학교육학회 회장
(현) 한국수학교육학회 명예 회장

왕규채

서울대학교 사범대학 수학교육과 졸업
단국대학교 교육대학원 수학교육과 졸업(교육학 석사)
제7차 고등학교 수학 교과서 집필(공저)
2006년 개정 교육과정 고등학교 수학 교과서 집필(공저)
신월중, 영등포여고, 구일고, 구정고, 석관고, 성동고 교사
(현) 서울과학고등학교 교사

송교식

서울대학교 사범대학 수학교육과 졸업
서울대학교 사범대학원 수학교육과 졸업(교육학 석사)
제7차 고등학교 수학 교과서 집필(공저)
2006년 개정 교육과정 고등학교 수학 교과서 집필(공저)
선린중, 석관고, 청담고, 한성과학고 교사
(현) 용산고등학교 교사

양인웅

성균관대학교 사범대학 수학교육과 졸업
성균관대학교 교육대학원 수학교육과 졸업(교육학 석사)
2006년 개정 교육과정 고등학교 수학 교과서 집필(공저)
경동고, 잠실고, 수락고 교사
(현) 경복고등학교 교사

표지 출처
김상구 / Kim Sang-ku / No. 892 / 46×61 cm / 2004

단원별 집필
총괄 진행 이강섭
Ⅰ **적분법** 송교식
Ⅱ **순열과 조합** 이강섭
Ⅲ **확률** 이강섭
Ⅳ **통계** 이강섭

편집 김영호, 한란, 한혜현, 김화신, 박세린
디자인 김태원, 박현신, 김의수
삽화 송희석, 양승용, 토리 디자인
사진 이석원
컷 이미영, 김상준, 김윤아

교육과학기술부의 위탁을 받아 **한국교육과정평가원**이 검정 심사를 하였음.

고등학교 적분과 통계

2009. 8. 10. 전시본 인쇄 비 매 품
2009. 8. 17. 전시본 발행

지은이 이강섭 외 3인
발행인 (주)지학사 서울시 마포구 동교동 180-20
인쇄인

교과서에 대한 문의사항이나 의견이 있으신 분은 교육과학기술부〈교육과정 · 교과서정보서비스 (http://cutis.mest.go.kr)〉를 이용하여 주시기 바랍니다.

내용관련문의 (주)지학사 수학부 전화 02-330-5440 전송 02-325-8009
개별구입문의 사단법인 한국검정교과서(www.ktbook.com) 고객지원팀 02-3663-5409~12